**Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar**
**Alexander Hock** **WS 18/19**

**Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III**

Abgabe: *Mittwoch*, 31.10.2018 bis 12h00 in den Briefkästen — Blatt 3

---

**Aufgabe 1.** Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 + x - \mathrm{e}^{y_1+2y_2} + \mathrm{e}^{y_1+y_2+x} \\ y_1 + y_2 + x + \frac{1}{2}\sin(y_1 + y_2 + x) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem $F(x, y_1, y_2) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ nach $y_1$ und $y_2$ aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie das maximale Intervall für $x$, auf dem die Auflösung in (a) möglich ist.

(c) Bestimmen Sie den Tangentialvektor der Lösungskurve aus (a) an der Stelle $x = 0$.

**Aufgabe 2.** Sei $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x_1, x_2, y) = x_1^4 + 2x_1 \cos x_2 + \sin y = 0$.

(a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $G(x_1, x_2, y) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ nach $y$ aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie für die Auflösung $y(x_1, x_2)$ aus (a) das Taylorpolynom zweiten Grades an der Stelle $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

**Aufgabe 3.** Sei $0 < r < R$ und $T \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die man von $(r+R, 0, 0)$ aus durch Nacheinanderausführung

- einer Drehung um die Achse $x = R, z = 0$ um einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ und
- einer Drehung um die $z$-Achse um einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$

erreichen kann.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$, daß $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

(b) Beschreiben Sie $(x, y, z) \in T$ als Funktionen von $\phi$ und $\theta$.

(c) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Basis für den Tangentialraum an $T$ an dem durch $\phi = \theta = \pi/4$ bestimmten Punkt.

**Aufgabe 4.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ wie in Aufgabe 4 von Blatt 1. Sei $f\colon M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert durch $A \mapsto A^T A - E_n$. Dann ist $O(n) = f^{-1}(0)$ die Gruppen der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie:

(a) $(Df)(A)(BA) = A^T(B + B^T)A$ für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.
(*Hinweis:* Verwenden Sie die Gleichung $((Df)(A))(BA) = \frac{d}{dt} f(A + tBA)\big|_{t=0}$.)

(b) $\operatorname{rang}((Df)(A)) = n(n + 1)/2$ für alle $A \in O(n)$.

(c) $O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Dimension $n(n-1)/2$ und Kodimension $n(n + 1)/2$.

(d) Für $\mathfrak{o}(n) := T_{E_n}(O(n))$ gilt $\mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n \times n, \mathbb{R}) : X^t = -X\}$.