Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 18/19

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 14.12.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 9

Aufgabe 1. (a) Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = |z|^4 - 2|z|^2$ und $g(z) = x^3y^2 + \mathrm{i}x^2y^3$ mit $z = x + \mathrm{i}y$. Geben Sie alle Punkte an, an denen f bzw. g komplex differenzierbar oder sogar holomorph ist.

(b) Finden Sie holomorphe Funktionen $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ mit

i) $u(x, y) = -x^3 + 2x^2 + y^2(3x - 2)$

ii) $u(x, y) = \sin(x)e^{-y}$

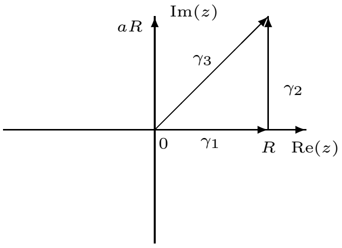
Hinweis: Erraten erlaubt!

Aufgabe 2. (a) Zeige Sie für $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| \leq 1$ die folgende Integralidentität:

$$\int_0^\infty e^{-(1+\mathrm{i}a)^2t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{1-\mathrm{i}a}{1+a^2}\sqrt{\pi}.$$

Konstruieren Sie dafür ein Dreieck in der komplexen Ebene und nehmen Sie den Limes $\lim_{R\to\infty}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion e^{-z^2}. Finden Sie Parametrisierungen für γ_1, γ_2, nutzen Sie $\gamma_3 : [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto (1 + \mathrm{i}a)t$ und die Lösung des Integrals $\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.



(b) Folgern Sie $\int_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $$\int_{\partial K_2(0)} \frac{w^2(w^2-1)}{\sqrt{2}-w}\mathrm{d}w\,,$$ (b) $$\int_{\partial K_{3/2}(\mathrm{i})} \frac{1}{w^2+1}\mathrm{d}w$$

(c) $$\int_{\partial K_{3/2}(1)} \frac{1}{w^2+1}\mathrm{d}w\,,$$ (d) $$\int_{\partial K_3(0)} \frac{\cos(\pi w)}{w^2-1}\mathrm{d}w$$

Hinweis: Verwenden Sie bei (c) und (d) die Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 4. (a) Wie schnell müßte ein Reisender sein, damit er anläßlich der Wintersonnenwende jedem Kind auf der Erdoberfläche S^2 ein Geschenk in nur einer Nacht bringen kann? (*Bemerkung:* Machen Sie passende Annahmen.)

(b) Malen Sie den Reisenden aus (a) mit mathematischen Symbolen.