Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 19/20**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 17.10.2019 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 1

Aufgabe 1. Von Leonardo Fibonacci stammt folgendes Modell zur Vermehrung von Kaninchen. Nimmt man an, daß Kaninchen unsterblich sind, stets in Paaren auftreten und jedes Paar in jedem Monat ein neues Kaninchenpaar zeugt, welches nach Ablauf zweier Monate selbst Nachwuchs bekommt, so genügt die Anzahl f_n der Kaninchenpaare im Monat n der Rekursionsgleichung

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Überzeugen Sie sich, daß das Kaninchenmodell auf diese Gleichung führt.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß im Fall $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$

(d) $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \,, \qquad n \geq 1$

Aufgabe 2. (a) Welche der folgenden Abbildungen ist injektiv/surjektiv/bijektiv?

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x+1, \qquad g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x+1.$$

(b) Sind folgende Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv/surjektiv/bijektiv? (Begründung oder Gegenbeispiel):

i) $f : (x, y) \mapsto (3y, x-1)$
ii) $f : (x, y) \mapsto (xy, x-y)$
iii) $f : (x, y) \mapsto (y^3 - y, x)$
iv) $f : (x, y) \mapsto (\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, y + x)$

Aufgabe 3. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiele folgende Aussagen:

(a) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

(b) $g \circ f$ ist genau dann surjektiv, wenn g und f surjektiv sind.

(c) Wenn $g \circ f$ surjektiv und g injektiv ist, dann muß g bijektiv und f surjektiv sein.
Extra Beispiel:
Wenn $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, dann muß g injektiv sein.
Lösung. Wahr. Beweis: Seien $y, y' \in Y$ mit $g(y) = g(y')$. Da f surjektiv ist, existieren $x, x' \in X$ mit $f(x) = y$ und $f(x') = y'$. Dann folgt $g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x'))$ und wegen Injektivität von $g \circ f$ auch $x = x'$, also $y = f(x) = f(x') = y'$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie:

(a) $2^{n+1} + 3 \cdot 7^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann ist die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch n teilbar.