Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **WS 19/20**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 19.12.2019 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 10

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \leq g(b)$. Zeigen Sie, daß dann ein $x \in [a, b]$ existiert mit $f(x) = g(x)$.

(b) Sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß dann ein $x \in [a, b]$ existiert mit $f(x) = x$.
Bemerkung: Solch ein x nennt man einen *Fixpunkt* von f.

Aufgabe 2. Überprüfen Sie, ob folgende Funktionsgrenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls (ohne die Regel von de l'Hospital):

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^p - 1}{x^q - 1}\,, \quad p, q \in \mathbb{N}^\times$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp\big((1+x)^2\big) - \exp(1+2x)}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x^2}{1+x^3} - \dfrac{2x}{(x+1)^2}\right)$

Aufgabe 3. Sei $a \in]0, 1[\cup]1, \infty[$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $x \mapsto a^x$, eine Umkehrabbildung $\log_a := f^{-1}\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ besitzt, und daß $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$ für alle $y \in]0, \infty[$.

Aufgabe 4. (a) Geben Sie eine Reihenentwicklung der Funktion $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$ für $x \in]-1, 1[$ an.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a):

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3(2n+1)9^n},$$

$$\ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3(2n+1)9^n} + \frac{2}{5(2n+1)25^n}\right),$$

$$\ln 5 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3(2n+1)9^n} + \frac{2}{9(2n+1)81^n}\right).$$