Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 19/20

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 9.1.2020 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 11

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie: $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy < 1$ gilt

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von (b) sowie der für $x \in]-1,1[$ gültigen Reihendarstellung $\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n} x^{1+2n}$ die folgende schnell konvergierende Reihendarstellung für π:

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ und $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ für $-\pi < x < \pi$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}^\times$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}kx} = \frac{1-e^{\mathrm{i}nx}}{1-e^{\mathrm{i}x}}$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}^\times$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx) = \sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ für:

$$f(x) = x^x\,, \quad x > 0\,, \qquad f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})\,, \quad 0 < x < 1\,,$$

$$f(x) = \ln(\tan(x))\,, \qquad f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x^2}\right).$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9}{\cos(x^2 - x) - 1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\cosh^n x)}{\sqrt{x^2+x}}$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.