Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **WS 19/20**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 16.1.2020 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 12

Aufgabe 1. Wir definieren zwei Folgen von Polynomen $(T_n)_n$ und $(U_n)_n$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} T_{n+1}(y) &= 2yT_n(y) - T_{n-1}(y), \qquad & T_0(y) &= 1, \qquad & T_1(y) &= y, \\ U_{n+1}(y) &= 2yU_n(y) - U_{n-1}(y), \qquad & U_0(y) &= 1, \qquad & U_1(y) &= 2y. \end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß dann für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(nx) = T_n(\cos x), \qquad \sin(nx) = \sin x \cdot U_{n-1}(\cos x).$$

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie die Extrema, deren Art sowie die Wendepunkte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x \exp(-x^2).$$

(b) Bestimmen Sie für $|z| < 1$ die Reihen

$$\text{i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} kz^k, \qquad \text{ii)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k.$$

Hinweis: Eine Operation auf die geometrische Reihe führt zum gewünschten Ergebnis.

Aufgabe 3. Nach dem Planckschen Strahlungsgesetz ist die spektrale Strahlungsdichte eines schwarzen Körpers der Temperatur $T > 0$ bei der Wellenlänge $\lambda > 0$ gegeben durch

$$I(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}, \qquad h, c, k > 0.$$

(a) Zeigen Sie: Ist $I(\lambda)$ extremal im Punkt $\lambda_0 \in]0, \infty[$, so gilt $(5 - x_0)e^{x_0} = 5$ für $x_0 := \frac{hc}{kT\lambda_0}$.

(b) Zeigen Sie: $I(\lambda)$ hat genau einen extremalen Punkt $\lambda_0 \in]0, \infty[$.