Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 19/20

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 31.10.2019 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. Geben Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der folgenden komplexen Zahlen an:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{2+3\mathrm{i}} \qquad \text{(b)} \quad \frac{3+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2+\sqrt{7}\mathrm{i}} + \frac{1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2-\sqrt{7}\mathrm{i}} \qquad \text{(c)} \quad \left(\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $(1+\mathrm{i})z^2 + \mathrm{i}z = \frac{1}{1-\mathrm{i}}$ und geben Sie es in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

(b) Die Normalform einer kubischen Gleichung ist $z^3 + pz + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$.
Mit der Diskriminante $D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ ist die Lösungen dieser kubischen Gleichung gegeben sind durch die Cardanischen Formeln

$$z_1 = u + v\,, \qquad z_2 = \zeta_1 u + \zeta_2 v\,, \qquad z_3 = \zeta_2 u + \zeta_1 v$$

mit den dritten Einheitswurzeln $\zeta_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\zeta_2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ sowie

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\,, \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}\,.$$

Dabei ist $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{-a}$ für $a < 0$.
Bestimmen Sie die Lösungen von $z^3 + 6z + 2 = 0$.

Aufgabe 3. Skizzieren Sie folgende Punktemenge der Gaußschen Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > \frac{1}{R}\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\left(z^2\right) > \mathrm{Re}\,(z)\}$

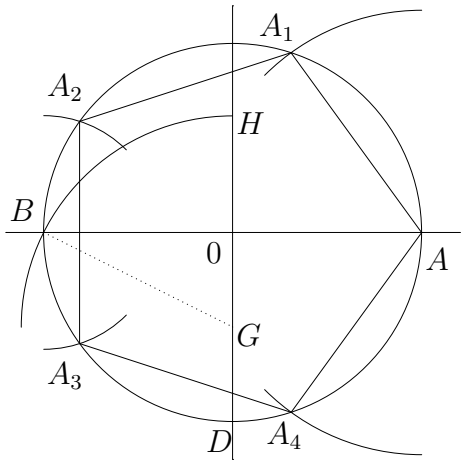
c) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < |z+1| < 1\,, |z| < |z+\mathrm{i}|\}$

Aufgabe 4. Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal:

- Konstruiere in der Gaußschen Zahlenebene den Einheitskreis S mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse seien $A = 1 \in \mathbb{C}$ und $B = -1 \in \mathbb{C}$.
- Konstruiere das Lot L auf $\overline{AB}$ durch 0 (y-Achse). Sei D einer der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis S. Konstruiere den Mittelpunkt G von $\overline{0D}$.
- Zeichne um G einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{GB}|$. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit $L(= y\text{-Achse})$, welcher innerhalb S liegt, sei H.

- Zeichne um B einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{0H}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_2 und A_3.
- Zeichne um A einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{A_2A_3}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_1 und A_4, wobei A_1, A_2 auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegen.

Dann beweisen (a),(b),(c): (A, A_1, A_2, A_3, A_4) sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks.



(a) Zeigen Sie: Die Länge $|\overline{0H}| =: h = g^{-1}$ ist das Inverse des goldenen Schnittes, $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Koordinaten $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ der Eckpunkte A_n, mit $n = 1, 2, 3, 4$, gegeben sind durch

$$z_1 = \overline{z_4} = \frac{h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3+h}\,, \qquad z_2 = \overline{z_3} = -\frac{1+h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2-h}\,.$$

Hinweis: Für das Inverse des goldenen Schnittes gilt $h^2 = 1 - h$.

(c) Beweisen Sie die Identitäten $(z_1)^2 = z_2$, $(z_2)^2 = z_4$, $z_2 z_3 = 1$ und $z_1 z_4 = 1$.