Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 19/20

Probeklausur zur Mathematik für Physiker I

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an einer der Klausuren am 25.1.2020 bzw. 25.3.2020 sind eine erfolgreiche Teilnahme an den Übungen sowie eine zuvor erfolgte QISPOS-Anmeldung zur Vorlesung erforderlich.
- Die Aufteilung auf die Hörsäle M1,M2,M3 wird im Lernweb organisiert. Bitte wählen Sie einen Hörsaal und schreiben Sie die Klausur in diesem Hörsaal.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im WS 2017/18.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Die Probeklausur wird in der Vorlesung am 20.1.2020 vorgerechnet.

Aufgabe 1. (a) Es seien a_k reelle Zahlen mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine reelle Zahl R mit $|a_k| \leq R$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Die Hermite-Polynome sind definiert als $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$, also $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, etc. Die Laguerre-Polynome sind definiert als $L_n(x) := \frac{e^x}{n!}(x^n e^{-x})^{(n)}$, also $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, etc. Sie dürfen ohne Begründung verwenden, daß $\mathcal{H} := (H_0(x), H_1(x), H_2(x))$ bzw. $\mathcal{L} := (L_0(x), L_1(x), L_2(x))$ Basen im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 bilden.

Die Aufgabe: Zerlegen Sie $H_2(x)$ nach der Basis $\mathcal{L}$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2+t \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, daß die durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} := \frac{6x_n}{x_n^2+3}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4. (a) Begründen Sie, daß die Reihe $P(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} z^n$ für $z = 1 + \mathrm{i}$ konvergiert, aber für $z = \mathrm{i}\pi$ divergiert.

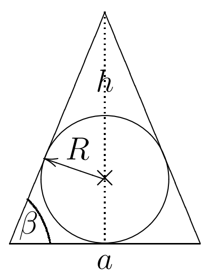
(b) Berechnen Sie (falls konvergent): $\operatorname{Im}\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\Big)^n\Big)$.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \big(\ln(x+3) - \ln x\big) \cdot (\sqrt{x^2+3} + x)$

(b) $\displaystyle\lim_{x \nearrow 1} \frac{\tan(\frac{\pi}{4}x) - \sqrt{x}}{\frac{\pi}{4} - \arctan x}$

Aufgabe 6. Das Flächenträgheitsmoment eines gleichschenkligen Dreiecks der Grundlänge a und Höhe h beträgt $I = \frac{ha^3}{48}$ (bei Rotation um die Symmetrieachse). Ferner sei R der Radius des Inkreises.



(a) Zeigen Sie: Ist β einer der Winkel zwischen Grundseite und Schenkel, dann gilt $h = R\frac{(1+\cos\beta)}{\cos\beta}$ und $a = 2R\frac{(1+\cos\beta)}{\sin\beta}$.

(b) Beweisen Sie: In der Menge $\mathcal{M}_R$ aller gleichschenkligen Dreiecke mit Inkreisradius R gibt es ein Dreieck mit minimalem Flächenträgheitsmoment.

(c) Bestimmen Sie dieses minimale Flächenträgheitsmoment $I_{\min}$.
Hinweis: $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = (1+\cos\beta)(1-\cos\beta)$