Äquivalenzrelationen und große Kardinalzahlen

Ralf Schindler

Universität Münster
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung

Definierbare Äquivalenzrelationen

Wir betrachten Äquivalenzrelationen auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

$E \subset \mathbb{R}^2$ ist eine *Äquivalenzrelation* gdw. für alle reellen Zahlen x, y, z gilt:

- xEx
- $xEy \Rightarrow yEx$ und
- $xEy \wedge yEz \Rightarrow xEz$.

Wie kompliziert können derartige Äquivalenzrelationen sein? Z.B.: wie viele *Äquivalenzklassen* $[x]_E = \{y|yEx\}$ kann es geben?

Jede Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ besitzt mindestens eine und höchstens $2^{\aleph_0}$ (d.h. reell viele) Äquivalenzklassen.

Mit Hilfe des Auswahlaxioms konstruiert man sehr leicht für jedes κ mit $1 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ eine Äquivalenzrelation mit genau κ Äquivalenzklassen: Wähle $f\colon \kappa \to \mathbb{R}$ injektiv; setze xEy gdw. $x = y$ oder x, $y \notin \mathrm{ran}(f \restriction \{\alpha|\alpha > 0\})$.

Wir betrachten daher *definierbare* Äquivalenzrelationen.

Ein berühmtes Beispiel:

Die *Vitali-Äquivalenzrelation*: $xE_0y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$.

Theorem (Pythagoräer, 500 v.u.Z.?). E_0 besitzt mindestens zwei verschiedene Äquivalenzklassen.

E_0 besitzt in der Tat $2^{\aleph_0}$ Äquivalenzklassen.

Ähnliches gilt, wie wir gleich sehen werden, für viele definierbare Äquivalenzrelationen.

Georg Cantor hatte eine ähnliche Frage in Bezug auf bloße *Mengen* reeller Zahlen gestellt:

Wie groß können definierbare Mengen reeller Zahlen sein?

Die Antworten, die es auf Cantors Frage gibt, können mit Hilfe der **klassischen Deskriptiven Mengenlehre** gewonnen werden.

Klassische Deskriptive Mengenlehre:
Determiniertheit + große Kardinalzahlen.

Für die Frage nach der möglichen Zahl von Äquivalenzklassen definierbarer Äquivalenzrelationen ist die klassische Deskriptive Mengenlehre nicht ausreichend. Wir benötigen hier die **moderne Deskriptive Mengenlehre**, die die Methoden der Inneren Modelltheorie zu Hilfe nimmt.

Moderne Deskriptive Mengenlehre:
Determiniertheit + große Kardinalzahlen + Theorie der Inneren Modelle.

Die *Deskriptive Mengenlehre* studiert Eigenschaften *definierbarer* Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, wobei "definierbar" bedeutet:

- Borel

- analytisch/koanalytisch

- projektiv

- Souslin/universell Bairesch

Äquivalenzrelationen können als Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ in diesem Sinne definierbar sein.

Die Äquivalenzrelation E heißt *Borel* gdw. E als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ eine Borelmenge ist.

Empirische Beobachtung: Jede Borel-Äquivalenzrelation besitzt entweder höchstens abzählbar viele oder $2^{\aleph_0}$ Äquivalenzklassen.

Beispiele:

Theorem (Feldman-Moore). Sei E eine Borel-Äquivalenzrelation, für die jedes $[x]_E$ höchstens abzählbar ist. Dann existiert eine abzählbare Polnische Gruppe G, die auf $\mathbb{R}$ agiert, so daß E die durch G auf $\mathbb{R}$ induzierte Orbit-Äquivalenzrelation ist.

Eine fundamentale Einsicht ist nun das nachfolgende allgemeine Dichotomie-Resultat:

Theorem (Silver; 1980). Sei E eine Borel-Äquivalenzrelation. Dann gilt entweder:
• E hat höchstens abzählbar viele Äquivalenzklassen, oder
• es gibt eine perfekte Menge $P \subset \mathbb{R}$ mit $[x]_E \neq [y]_E$ für alle x, $y \in P$, $x \neq y$.

$P \subset \mathbb{R}$ heißt *perfekt* gdw.

$P \neq \emptyset$,

P ist abgeschlossen, und

P besitzt keine isolierten Punkte.

Jede perfekte Menge reeller Zahlen ist gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.

Theorem (Hausdorff und Aleksandrov; 1914). Jede überabzählbare Borel-Menge enthält eine perfekte Teilmenge.

Nach obigem Satz von Silver gilt also: Sei E eine Borel-Äquivalenzrelation. Dann besitzt E entweder höchstens abzählbar viele oder $2^{\aleph_0}$ Äquivalenzklassen.
E ist also entweder "sehr einfach" oder "sehr kompliziert".

Nach dem Satz von Hausdorff und Aleksandrov gilt: Sei $A \subset \mathbb{R}$ Borel. Dann ist A entweder höchstens abzählbar oder besitzt $2^{\aleph_0}$ Elemente.

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt *analytisch* (oder $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$) gdw. A Projektion einer Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ist, d.h. wenn

$$\vec{x} \in A \Leftrightarrow \exists y(\vec{x}, y) \in B.$$

A ist analytisch gdw. $A = f(D)$ für eine Borelmenge D und eine stetige Funktion f ist.

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt *koanalytisch* (oder $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$) gdw. das Komplement von A eine analytische Menge ist.

Borel $= \underset{\sim}{\Sigma}^1_1 \cap \underset{\sim}{\Pi}^1_1$, wobei Borel $\subsetneq \underset{\sim}{\Sigma}^1_1, \underset{\sim}{\Pi}^1_1$.

Theorem (Silver; 1980). Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine koanalytische Äquivalenzrelation. Dann gilt entweder:
• E hat höchstens abzählbar viele Äquivalenzklassen, oder
• es gibt eine perfekte Menge von paarweise E-inäquivalenten reellen Zahlen.

Theorem (Souslin; 1917). Sei $A \subset \mathbb{R}$ analytisch. Dann ist A entweder höchstens abzählbar oder enthält eine perfekte Teilmenge.

Wir werden später sehen, WARUM diese Aussagen richtig sind.

Wie steht es mit analytischen Äquivalenzrelationen bzw. mit koanalytischen Mengen?

Sei xEy gdw. entweder: weder x noch y kodiert eine (abzählbare) Wohlordnung, oder: es existiert ein Isomorphismus zwischen den Ordnungen, die durch x und y kodiert werden.

• E ist analytisch, und
• E hat $\aleph_1$ Äquivalenzklassen.
• Jedes perfekte $P \subset \mathbb{R}$ enthält zwei E-äquivalente reelle Zahlen.

Theorem (Burgess; 1978). Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine analytische Äquivalenzrelation Dann gilt:
- E hat höchstens $\aleph_1$ Äquivalenzklassen, oder
- es gibt eine perfekte Menge von paarweise E-inäquivalenten Zahlen.

Komplementär dazu:

Theorem (Sierpinski; 1925). Jede koanalytische Menge reeller Zahlen mit mehr als $\aleph_1$ Elementen besitzt eine perfekte Teilmenge.

Wir wollen endlich E *dünn* nennen gdw. es kein perfektes $P \subset \mathbb{R}$ gibt, so daß $[x]_E \neq [y]_E$ für alle x, $y \in P$, $x \neq y$.

Die Verallgemeinerung des Theorems von Burgess lautet:

Theorem (Harrington, Shelah; 1980). ($V \prec_{\underset{\sim}{\Sigma}^1_3} V^{\mathbb{P}}$ für $\mathbb{P}$ = Cohen forcing.) Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne $\underset{\sim}{\Pi}^1_2$ Äquivalenzrelation. Dann hat E höchstens $\aleph_1$ Äquivalenzklassen.

Was ist das Muster?

$\boxed{\text{Projektive Mengen}}$

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{n+1}$ gdw. A Projektion einer $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$ Menge $B \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ist.

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt $\underset{\sim}{\Pi}^1_{n+1}$ gdw. das Komplement von A $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{n+1}$ ist.

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt $\underset{\sim}{\Delta}^1_n$ gdw. A sowohl $\underset{\sim}{\Sigma}^1_n$ als auch $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$ ist.

$$\ldots \underset{\sim}{\Delta}^1_n \underset{\neq}{\subset} \underset{\sim}{\Sigma}^1_n, \underset{\sim}{\Pi}^1_n \underset{\neq}{\subset} \underset{\sim}{\Delta}^1_{n+1} \ldots$$

Projektiv $= \bigcup_n \underset{\sim}{\Sigma}^1_n = \bigcup_n \underset{\sim}{\Pi}^1_n$.

Unsere Frage ist jetzt also:

Sei E eine dünne projektive Äquivalenzrelation. Wieviele Äquivalenzklassen kann E haben?

(Man kann zeigen, daß es projektive Äquivalenzrelationen mit $\aleph_2$ und mehr Äquivalenzklassen geben kann, siehe unten!)

Die Variante dieser Frage für Mengen reeller Zahlen lautet: gibt es definierbare Gegenbeispiele zur **Kontinuumshypothese**?

Wir müssen, wie wir sehen werden, starke Axiome heranziehen, um diese Fragen anzugehen!

$\boxed{\kappa \text{ Souslinsche Mengen}}$

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt κ Souslin gdw. es einen Baum auf $\mathbb{N} \times \kappa$ gibt, so daß $A = p[T]$, d.h.

$$x \in A \Leftrightarrow \exists f \in {}^{\mathbb{N}}\kappa \forall n (x \restriction n, f \restriction n) \in T.$$

$A \subset \mathbb{R}$ ist $\aleph_0$ Souslin gdw. A analytisch ist.

Jede koanalytische, sogar jede $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist $\aleph_1$ Souslin.

(Jedes $A \subset \mathbb{R}$ ist trivial $2^{\aleph_0}$ Souslin.)

Die folgende Aussage erklärt die Resultate, die wir bislang gesehen haben.

Eine Äquivalenzrelation $E \subset \mathbb{R}^2$ heißt *ko-*κ Souslin gdw. $\mathbb{R}^2 \setminus E$ κ Souslin ist.

Theorem (Harringon, Shelah; 1980). Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne ko-κ Souslin Äquivalenzrelation. Sei zusätzlich E immer noch eine Äquivalenzrelation in $V^{\mathbb{P}}$, wobei $\mathbb{P} =$ Cohen forcing. Dann hat E höchstens κ Äquivalenzklassen.

Komplementär dazu:

Theorem (Mansfield; 1970). Sei $A \subset \mathbb{R}$ κ Souslin. Wenn A mehr als κ Elemente besitzt, dann hat A eine perfekte Teilmenge.

Um die optimalen Resultate zu erzielen, müssen wir zu gegebener definierbarer Äquivalenzrelation E das kleineste κ bestimmen, so daß E κ Souslin ist.

Wir benötigen hierfür die moderne Deskriptive Mengenlehre.

$\boxed{\text{ZFC}}$

ZFC (Zermelo-Fraenkel mit Auswahl) ist die Standardaxiomatisierung der Mengenlehre.

Axiome von Z: Extensionalität, Fundierung, Paarmenge, Vereinigungsmenge, Potenzmenge, Unendlichkeit, Aussonderung.

Axiome von ZF: Z + Ersetzung.

Axiome von ZFC: ZF + Auswahlaxiom.

Projektive Determiniertheit

Sei $A \subset [0, 1]$.

Gale/Stewart (1953): Betrachte das folgende Spiel, G(A):

I	i_0		i_2		$\cdots$		
II		i_1		i_3		$\cdots$	

$i_n \in \{0, 1\}$. D.h. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in [0, 1]$.

I gewinnt. gdw. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in A$, ansonsten gewinnt II.

G(A) (oder auch A selbst) heißt *determiniert* gdw. entweder I oder II eine Gewinnstratgie hat.

Theorem (Martin; 1970). Jede Borel-Menge ist determiniert.

Sei Γ eine hinreichend abgeschlossene Klasse von Mengen reeller Zahlen. Wenn dann A determiniert ist für jedes $A \in \Gamma$, dann gilt:

Theorem (Mycielski-Swierczkowski; 1964). Wenn $A \in \Gamma$, dann ist A Lebesgue-meßbar.

Theorem (Mazur; 193?). Wenn $A \in \Gamma$, dann hat A die Bairesche Eigenschaft.

Theorem (Davis; 1964). Wenn $A \in \Gamma$ überabzählbar ist, dann hat A eine perfekte Teilmenge.

Die Determiniertheit der Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ liefert den tieferen Grund dafür, warum $\exists^{\mathbb{R}} A$ entweder höchstens abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.

Projektive Determiniertheit (PD) ist die Aussage, daß jede projektive Menge reeller Zahlen determiniert ist.

Aufgrund des Satzes von Davis gibt es also (unter PD) keine projektiven $A \subset \mathbb{R}$, deren Mächtigkeit zwischen der von $\mathbb{N}$ und der von $\mathbb{R}$ liegt. Es gibt also keine projektiven Gegenbeispiele zur Kontinuumshypothese.

Für Äquivalenzrelationen gilt analoges *nicht* !

D.h., auch unter PD kann es projektive Äquivalenzrelationen E geben, so daß $\mathbb{R}/E$ von einer Mächtigkeit *zwischen* $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ ist.

Nicht zuletzt darum sind Äquivalenzrelationen interessanter als bloße Mengen reeller Zahlen.

Tatsache ist nun, daß Projektive Determiniertheit die Konsistenz sehr großer Kardinalzahlen impliziert. Umgekehrt beweisen große Kardinalzahlen PD.

$\boxed{\text{Große Kardinalzahlen}}$

Eine Kardinalzahl κ heißt *groß*, wenn die Existenz von κ nicht in ZFC bewiesen werden kann.

Beispiele:

Unerreichbar $<$ Mahlo $<$ schwach kompakt $<$ unbeschreibbar $<$ $0^{\#}$ $<$ meßbar $<$ meßbar mit hoher Mitchell-Ordnung $<$ stark $<$ Woodin $<$ nicht zahm $<$ nicht domestiziert $<$ Shelah $<$ superkompakt $<$ riesig

Theorem (Martin-Steel; 1985). Die Existenz unendlich vieler Woodin-Kardinalzahlen impliziert PD.

$\boxed{\Theta \text{ und } \underset{\sim}{\delta}^1_n}$

Man definiert

$$\Theta = \sup\{\alpha | \exists f \colon \mathbb{R} \overset{\text{surj.}}{\longrightarrow} \alpha\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\Theta = (2^{\aleph_0})^+$.

Interessanter sind "lokale Versionen" von Θ:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\underset{\sim}{\delta}^1_n = \sup\{\alpha | \exists f \colon \mathbb{R} \overset{\text{surj.}}{\longrightarrow} \alpha, f \in \underset{\sim}{\Delta}^1_n\}.$$

(Hierbei bedeutet $f \in \underset{\sim}{\Delta}^1_n$, daß der Graph von f eine $\underset{\sim}{\Delta}^1_n$ Menge im $\mathbb{R}^2$ ist.)

Es gilt

$$\aleph_1 = \underset{\sim}{\delta}^1_1 < \underset{\sim}{\delta}^1_2 < \underset{\sim}{\delta}^1_3 < \ldots \Theta.$$

Keine der Zahlen $\underset{\sim}{\delta}^1_n$ für $n > 1$ muß eine Kardinalzahl sein.

Aus der Kontinuumhypothese folgt

$$\aleph_1 = \underset{\sim}{\delta}^1_1 < \underset{\sim}{\delta}^1_2 < \underset{\sim}{\delta}^1_3 < \ldots \Theta = \aleph_2.$$

Auf der anderen Seite hat Woodin 1990 bewiesen, daß $\underset{\sim}{\delta}^1_2 = \aleph_2$ aus natürlichen Axiomen folgt.

$\underset{\sim}{\delta}^1_n \geq \aleph_2$ für ein $n > 1$ liefert ein definierbares Gegenbeispiel zur Kontinuumshypothese *in einem anderen als dem Cantorschen Sinne*!

Theorem (Kechris, Moschovakis; 1970). Es gelte Projektive Determiniertheit.
Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ eine $\underset{\sim}{\Sigma}^1_n$ Menge. Dann gilt:
• Für ungerades n ist A κ Souslin für ein $\kappa < \underset{\sim}{\delta}^1_n$, und
• für gerades n ist A $\underset{\sim}{\delta}^1_{n-1}$ Souslin.

Derartige "Periodizitäten" sind überall in der Deskriptiven Mengenlehre anzutreffen.

Korollar. Es gelte Projektive Determiniertheit. Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$ Äquivalenzrelation. Für ungerades n hat dann E weniger als $\underset{\sim}{\delta}^1_n$ Äquivalenzklassen. (I.e. $\mathrm{Card}(\mathbb{R}/E) < \underset{\sim}{\delta}^1_n$.) Für gerades n hat dann E höchstens $\underset{\sim}{\delta}^1_{n-1}$ Äquivalenzklassen. (I.e., $\mathrm{Card}(\mathbb{R}/E) \leq \underset{\sim}{\delta}^1_{n-1}$.)

Dieses Korollar, das mit Mitteln der klassischen Deskriptiven Mengenlehre gezeigt wird, erklärt lediglich fast alle Tatsachen bzgl. projektiver Äquivalenzrelationen, nicht aber die folgende.

Theorem (Kechris; 1978). Es gelte Projektive Determiniertheit.
Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ Äquivalenzrelation.
Dann hat E höchstens $\aleph_1$ Äquivalenzklassen.

Greg Hjorth zeigte dies 1997 mit Hilfe iterierbarer Innerer Modelle mit Woodin-Kardinalzahlen. Dieser Ansatz führt zu optimalen Resultaten bzgl. dünner Σ^1_n Äquivalenzrelationen für gerades n.

Der Satz von Kechris findet dann die folgende Verallgemeinerung.

Theorem (Sch; 2005). Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne $\underset{\sim}{\Sigma}^1_n$ Äquivalenzrelation, wobei n gerade ist. Dann ist E auch $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$. Insbesondere hat E höchstens $\underset{\sim}{\delta}^1_{n-1}$ Äquivalenzklassen.

Das Muster ist also wie folgt.

Komplexität der dünnen Äquivalenzrelation E

$$
\begin{array}{cccc}
\underset{\sim}{\Pi}^1_{2n+1} & \underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1} & \underset{\sim}{\Pi}^1_{2n+2} & \underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+2} \\
\hline
< \underset{\sim}{\delta}^1_{2n+1} & \leq \underset{\sim}{\delta}^1_{2n+1} & \leq \underset{\sim}{\delta}^1_{2n+1} & \leq \underset{\sim}{\delta}^1_{2n+1}
\end{array}
$$

Kardinalität von $\mathbb{R}/E$

Diese Resultate sind optimal.

Sei $\varphi\colon U \to \underset{\sim}{\delta}^1_{2n+1}$ eine $\underset{\sim}{\Pi}^1_{2n+1}$ Norm mit assoziierter PWO $\leq$. Sei $x \leq^* y$ gdw. $y \notin U$ oder $(x \in U \wedge x \leq y)$. Dann ist $\leq^*$ $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$.

Sei xEy gdw. $x \leq^* y \wedge y \leq^* x$. E ist dann eine (dünne!) $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$ Äquivalenzrelation mit genau $\underset{\sim}{\delta}^1_{2n+1}$ Äquivalenzklassen.

Wir wollen nun einen Blick auf den Beweis des letzten Theorems werfen.

$\boxed{\text{Innere Modelle}}$

$L_0[X] = \emptyset$

$L_{\alpha+1}[X]$ = die Menge aller über $L_\alpha[X]$ mit Hilfe von Parametern aus $L_\alpha[X]$ definierbaren Teilmengen von $L_\alpha[X]$, wobei X als Prädikat zur Verfügung steht

$L_\lambda[X] = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha[X]$ für Limeszahlen λ

$L[X] = \bigcup_\alpha L_\alpha[X]$

$L = L[\emptyset]$ ist Gödels "konstruktibles Universum".

Theorem (Gödel; 1938). L ist Modell von ZFC und erfüllt die (Allgemeine) Kontinuumshypothese.

Dies liefert das Beispiel einer dünnen $\underset{\sim}{\Delta}^1_3$ Äquivalenzrelation, die unter Umständen $\aleph_2$ Äquivalenzklassen hat:

Setze xEy gdw. $(\omega_1^V)^{+L[x]} = (\omega_1^V)^{L[y]}$.

Es gilt, daß E $u_2 = \underset{\sim}{\delta}^1_2$ Äquivalenzklassen hat; $u_2 = \aleph_2$ ist nach Woodins Resultat (siehe oben) plausibel.

Die moderne Deskriptive Mengenlehre benötigt *iterierbare Innere Modelle* mit Woodin-Kardinalzahlen.

Diese sind von der Form $L[E]$, wobei E eine Folge von *Externdern* (partiellen "Maßen") kodiert.

Bereits die Konstruktion dieser Modelle ist sehr schwierig.

M_n = das minimale iterierbare Innere Modell mit n Woodin-Zahlen.

$M_0 = L$.

$\boxed{\text{Der Beweis}}$

Sei E eine dünne Σ^1_n Äquivalenzrelation, wobei n gerade ist.

Startpunkt: $\mathcal{M} = M_{n-1}$, das kleinste iterierbare innere Modell mit $n-1$ Woodin-Kardinalzahlen. Sei δ die kleinste Woodin-Kardinalzahl von $\mathcal{M}$. Sei $\eta < \delta$ eine unerreichbare "lokale Woodin-Kardinalzahl" in $\mathcal{M}$.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir können x generisch am Bild von η über einem Iterat von $\mathcal{M}||\alpha$ machen (wobei α maximal ist mit $\mathcal{M}||\alpha \models \eta$ ist Woodin). Der springende Punkt ist: wenn x' eine beliebige andere reelle Zahl ist, die ebenfalls generisch am Bild von η über diesem Iterat ist (und einer gewissen Bedingung unterliegt), dann ist $x'Ex$. (Wir benutzen hier die Korrektheit von $\mathcal{M}$ und die Tatsache, daß E dünn ist.)

Wir können dann $\neg(xEy)$ wie folgt formulieren.

Es gibt $x'Ex$ und $y'Ey$ und es gibt ein Iterat $\mathcal{M}^*$ von $\mathcal{M}$ vermöge einer Iteration von $\mathcal{M}||\alpha$, die auf $\mathcal{M}||\eta$ lebt, so daß $x' \oplus y'$ generisch über $\mathcal{M}$ am Bild von η ist und $\mathcal{M}^*[x, y] \models \neg(x'Ey')$.

Aufgrund der Korrektheit von $\mathcal{M}$ und aufgrund der Tatsache, daß der relevante Teil der Iterationsstrategie von $\mathcal{M}$ eine Π^1_{n-1} Menge ist, wird dann $\neg E$ eine $\Sigma^1_n(m)$ Menge, wobei m das Modell $\mathcal{M}$ kodiert.

Resumee:

Wir haben die möglichen Größen von $\mathbb{R}/E$ für projektive E mittels der Zahlen $\underset{\sim}{\delta}^1_n$ charakterisiert.

In ZFC läßt sich aber lediglich

$$\aleph_1 = \underset{\sim}{\delta}^1_1 < \underset{\sim}{\delta}^1_2 < \underset{\sim}{\delta}^1_3 < \cdots < 2^{\aleph_0}$$

beweisen.

$\underset{\sim}{\delta}^1_2 = \aleph_2$ ist möglich.

Die Frage, ob $\delta^1_n \geq \aleph_3$ für ein $n \geq 3$ möglich ist, ist eine der zentralen Fragen der gegenwärtigen Mengenlehre.

Testproblem:

Existiert eine dünne projektive Äquivalenzrelation E auf $\mathbb{R}$, so daß (beweisbar unter vernünftigen Annahmen) E genau $\aleph_3$ Äquivalenzklassen hat?