Wozu brauchen wir große Kardinalzahlen?[1]

Ralf Schindler
Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung
Universität Münster
Einsteinstr. 62
48149 Münster, FRG
rds@math.uni-muenster.de

Wir brauchen große Kardinalzahlen, um richtige Antworten auf Fragen zu erhalten – grundsätzliche Fragen, die wir ohne große Kardinalzahlen nicht beantworten könnten. Beispiele hierzu sind etwa Fragen bezüglich projektiver Mengen reeller Zahlen.

Doch es gilt mehr. Oftmals schaffen große Kardinalzahlen sogar erst den geeigneten Rahmen für die Diskussion eines vorliegenden Problems. Ein Beispiel hierfür ist das Cantorsche Kontinuumsproblem – nachdem über mehrere Jahrzehnte hinweg klar zu sein schien, daß große Kardinalzahlen für dieses Problem bedeutungslos sein sollten, widerlegen neuere Forschungen diese Annahme sehr eindringlich.

Wir müssen etwas ausholen, um die Rolle großer Kardinalzahlen in der modernen Mengenlehre – und insbesondere bezüglich des Kontinuumsproblems – dokumentieren zu können.

§1. Cantor und die frühe Mengenlehre.

Cantor hat im Dezember 1873 entdeckt, daß es mehr reelle als rationale Zahlen gibt. (Siehe [1].) Für beliebige Mengen A und B sagen wir, daß A "kleiner oder gleich" B ist, kurz $A \leq B$, gdw. es eine Injektion $f: A \to B$ gibt (gdw. es eine Surjektion $g: B \to A$ gibt).[2] A ist "echt kleiner als" B, $A < B$, gdw. $A \leq B$ und $B \not\leq A$. Wenn $A \leq B$ und $B \leq A$, dann gibt es nach dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein eine Bijektion $h: A \to B$; in diesem Falle heißen A und B "gleichmächtig". Für beliebige Mengen A und B gilt $A \leq B$ oder $B \leq A$. Cantors Entdeckung besagt, daß $\mathbb{N} < \mathbb{R}$. Cantor hat ebenfalls gezeigt, daß $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind, d.h. daß $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, und damit, daß $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$. Nach einer Beobachtung Cantors vom

[1] Dieser Aufsatz ist die schriftliche Ausarbeitung meiner Antrittsvorlesung, die ich am 16.06.04 an der WWU Münster gehalten habe. Ich bedanke mich bei Herrn Heine vom Springer-Verlag und bei Herrn Prof. Wolfart für die Anregung, eine solche Ausarbeitung vorzunehmen.

[2] Der Beweis der Tatsache, daß die Existenz einer Surjektion $g: B \to A$ die Existenz einer Injektion $f: A \to B$ impliziert, benutzt das Auswahlaxiom. Wir setzen für unsere Diskussion die Gültigkeit des Auswahlaxioms ständig voraus.

Jahre 1874 ist sogar die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar, woraus sich die Existenz ebensovieler transzendenter Zahlen wie reeller Zahlen überhaupt ergibt.[3]

Cantors Kontinuumsproblem fragt, ob es eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ gibt, so daß $\mathbb{N} < A < \mathbb{R}$. Bekanntlich hat D. Hilbert diese Frage sodann als das erste Problem seine berühmte Liste anführen lassen. (Siehe [10].) Cantors Kontinuumsproblem ist nach wie vor offen. Allerdings wissen wir heute einiges mehr als die Zeitgenossen von Cantor und Hilbert über den Stellenwert dieser Frage.

Man kann das Kontinuumsproblem auch so formulieren: *wieviele* reelle Zahlen gibt es? Hinter der Aussage, daß $\mathbb{N} < \mathbb{R}$, steckt der allgemeinere Satz, daß die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A (d.h. die Menge aller Teilmengen von A) immer echt größer als A selbst ist, d.h. $A < \mathcal{P}(A)$: kein $f \colon A \to \mathcal{P}(A)$ kann surjektiv sein, da $\{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ nicht im Wertebereich von f liegen kann. Cantor zeigte auch, daß es zu jeder Menge M eine Menge B gibt, so daß $A < B$ für jedes $A \in M$ ist. Es gibt also in einem sehr starken Sinne beliebig große Mengen. Man kann kanonische Objekte, *Kardinalzahlen*, isolieren, so daß für jede Menge A eine gleichmächtige Kardinalzahl κ, die *Kardinalität von* A, existiert; es gilt, daß A und B gleichmächtig sind gdw. die Kardinalitäten von A und B gleich sind. Die Klasse der Kardinalzahlen ist *wohlgeordnet*, d.h. jede nichtleere Menge M von Kardinalzahlen enthält ein kleinstes Element, d.h. ein $\kappa \in M$, so daß $\kappa \leq \lambda$ für alle $\lambda \in M$ gilt. Insbesondere gibt es zu jeder Kardinalzahl κ einen (eindeutigen) Nachfolger, κ^+; κ^+ ist die kleinste Kardinalzahl, die echt größer als κ ist: da $\kappa < \mathcal{P}(\kappa)$, gibt es ein kleinstes λ, eben $\lambda = \kappa^+$, mit $\kappa < \lambda$. Kardinalzahlen, die nicht Nachfolger sind, heißen Limeskardinalzahlen.

Die endlichen Kardinalzahlen sind wohlbekannt: es sind dies 0, 1, 2, ... Die unendlichen Kardinalzahlen werden seit Cantor (in aufsteigender Reihenfolge) mit $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ..., $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$, ... bezeichnet. Hier ist $\aleph_0$ die Kardinalität von $\mathbb{N}$. $\aleph_1$ ist die kleinste überabzählbare Kardinalzahl, d.h. $\aleph_1 = (\aleph_0)^+$. $\aleph_2 = (\aleph_1)^+$, usw. $\aleph_\omega$ ist die kleinste Kardinalzahl, die größer ist als alle $\aleph_n$, $n \in \mathbb{N}$. (Insbesondere ist $\aleph_\omega$ Limeskardinalzahl.) $\aleph_{\omega+1} = (\aleph_\omega)^+$, usw. Die Kardinalität von $\mathbb{R}$ ist $\geq \aleph_1$. Das Kontinuumsproblem fragt, ob die Kardinalität von $\mathbb{R}$ gleich $\aleph_1$ ist oder nicht.

Die Cantorsche Kontinuumshypothese (kurz: CH) sagt, daß es keine Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit $\mathbb{N} < A < \mathbb{R}$ gibt, d.h. daß die Kardinalität von $\mathbb{R}$ gleich $\aleph_1$ ist.[4] Cantors Idee war, CH (d.h. die Nichtexistenz eines Gegenbeispiels $A \subset \mathbb{R}$ zu CH) durch "Induktion nach der Komplexität" der Mengen $A \subset \mathbb{R}$ zu zeigen. Beispielsweise ist leicht zu sehen, daß es kein offenes $A \subset \mathbb{R}$ mit $\mathbb{N} < A < \mathbb{R}$ geben kann. Tatsächlich besagt nun der Satz von Cantor-Bendixson von 1883, daß jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ eine perfekte Teilmenge besitzt. Definitionsgemäß ist $P \subset \mathbb{R}$

[3]Ein Jahr zuvor, 1873, hatte Liouville erstmals die Existenz transzendenter Zahlen gezeigt.

[4]Die Kardinalität von $\mathbb{R}$ wird oft mit $2^{\aleph_0}$ bezeichnet; CH ist also die Aussage $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

eine *perfekte* Menge gdw. $P \neq \emptyset$ abgeschlossen ist und jeder Punkt von P ein Häufungspunkt ist; wenn A eine perfekte Teilmenge besitzt, dann ist die Kardinalität von A dieselbe wie die von $\mathbb{R}$. Der Satz von Cantor-Bendixson impliziert somit, daß es kein abgeschlossenes Gegenbeispiel zu CH geben kann.

In der Folge wurden Verallgemeinerungen des Satzes von Cantor-Bendixson gezeigt, die die Vermutung nahelegten, daß Cantors Idee zum Beweis von CH zum Ziel führen könnte. W. H. Young bewies 1906, daß jede überabzählbare G_δ- oder F_σ-Menge $A \subset \mathbb{R}$ eine perfekte Teilmenge enthält. Alexandrov und F. Hausdorff zeigten 1916 unabhängig voneinander, daß sogar jede überabzählbare Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ eine perfekte Teilmenge enthält. Es kann also kein Gegenbeispiel zu CH geben, das eine Borelmenge ist; d.h. Gegenbeispiele zu CH müssen – falls sie überhaupt existieren – sehr kompliziert sein.

Bernstein hatte 1908 erkannt, daß mit Hilfe des Auswahlaxioms eine überabzählbare Menge reeller Zahlen konstruiert werden kann, die keine perfekte Teilmenge besitzt – allerdings hat sein Beispiel dieselbe Kardinalität wie $\mathbb{R}$. Dies führt zu einer *aufgeklärten Version* von Cantors Idee zum Beweis (der effektiven Version) von CH: man zeige, daß es keine "einfachen", d.h. in einem gewissen Sinne definierbaren, Gegenbeispiele zu CH gibt, indem man zeigt, daß jede überabzählbare "einfache" Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt!

Im Jahre 1916 fand M. Souslin, ein Student von N. Luzin in Moskau, einen Fehler in einer Arbeit von H. Lebesgue. Lebesgue hatte (als vermeindliche Trivialität!) behauptet, daß die Projektion des Durchschnitts von Mengen $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, wobei immer $A_n \subset \mathbb{R}^2$, auf die x-Achse dasselbe sei wie der Durchschnitt der Projektionen der Mengen A_n auf die x-Achse. Dies hätte zur Folge gehabt, daß die Projektion einer beliebigen Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ auf die x-Achse wieder eine Borelmenge ist. Souslin sah, daß sogar letzteres falsch ist. Er bezeichnete Projektionen von Borelmengen $A \subset \mathbb{R}^2$ auf die x-Achse als *analytische* Mengen und zeigte, daß es analytische Mengen gibt, die nicht Borel sind.[5] Souslin bewies sodann, daß jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ eine perfekte Teilmenge enthält.

Ohne es zu ahnen hatte Souslin damit ein Resultat gezeigt, das – jedenfalls ohne die Hinzunahme großer Kardinalzahlen – nicht zu verbessern ist. Auf der anderen Seite liefert die Existenz großer Kardinalzahlen, wie wir später sehen werden, daß es nicht nur kein analytisches Gegenbeispiel zu CH sondern überhaupt kein "definierbares" Gegenbeispiel zu CH geben kann, d.h. daß mit Hilfe großer Kardinalzahlen die aufgeklärkte Version von Cantors Idee durchführbar ist.

Mit Gegenbeispielen A zu CH meinten wir bisher Mengen $A \subset \mathbb{R}$, so daß $\mathbb{N} < A < \mathbb{R}$. Man kann aber fragen, ob es "definierbare" Gegenbeispiele zu CH in einem

[5] Siehe hierzu [17]. Ich danke Herrn Benjamin Claverie dafür, daß er mir die einschlägige Passage ins Deutsche übersetzt hat.

anderen Sinne gibt. Angenommen, CH ist falsch. Dann existiert eine Surjektion $f\colon \mathbb{R} \to \aleph_2$. Die Menge $\{(x, y) \mid f(x) \leq f(y)\}$ ist dann eine *Präwohlordnung* von $\mathbb{R}$ der Länge $\aleph_2$.

Es stellt sich die Frage, ob es "definierbare" Gegenbeispiele zu CH in dem Sinne geben kann, daß es "definierbare" Präwohlordnungen von $\mathbb{R}$ der Länge $\geq \aleph_2$ gibt.[6] Es wird sich folgendes herausstellen: selbst wenn es keine einfachen Gegenbeispiele $A \subset \mathbb{R}$ zu CH mit $\mathbb{N} < A < \mathbb{R}$ gibt, so kann es doch einfache Gegenbeispiele zu CH im Sinne der Existenz langer Präwohlordnungen von $\mathbb{R}$ geben.

§2. Große Kardinalzahlen und die Axiomatisierung der Mengenlehre.

Eine Kardinalzahl κ heißt *regulär* gdw. es keine Darstellung $\kappa = \bigcup_{i \in I} X_i$ von κ gibt, so daß sowohl I als auch jedes X_i echt kleiner als κ ist. Beispielsweise ist jedes $\aleph_n$ für $n \in \mathbb{N}$ regulär und auch jede Nachfolgerkardinalzahl κ^+ ist regulär. Auf der anderen Seite ist $\aleph_\omega$ nicht regulär, da $\aleph_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \aleph_n$. Kardinalzahlen, die nicht regulär sind, heißen *singulär*.

In seinen "Grundzügen der Mengenlehre" fragt Hausdorff, ob es eine überabzählbare reguläre Limeskardinalzahl gibt. Hausdorff konnte die Tragweite dieser Frage nicht erahnen. Ironischerweise sagt er, daß bereits "die kleinste unter ihnen von einer so exorbitanten Größe" sei, daß die Betrachtung einer derartigen Zahl "für die üblichen Zwecke der Mengenlehre kaum jemals in Betracht kommen wird." (Siehe [9, p. 231].) Die Geschichte der Mengenlehre hat jedoch gezeigt, daß große Kardinalzahlen in ihr eine zentrale Rolle spielen.

Es gibt keine formale Definition des Begriffs der "großen Kardinalzahl". Jedoch muß über Axiomatisierungen der Mengenlehre gesprochen werden, um diesen Begriff illustrieren zu können.

Von Zermelo und Fraenkel stammt die heutige Standard-Axiomatisierung der Mengenlehre. Nachdem Russell erkannt hatte, daß $\{x | x \notin x\}$ keine Menge sein kann, stellte E. Zermelo 1908 das erste brauchbare Axiomensystem der Mengenlehre vor. Wir schreiben heute ZFC für das auf Zermelo ("Z") und Fraenkel ("F") zurückgehende Axiomensystem der Mengenlehre mit Auswahlaxiom ("C" für "choice").

In ZFC kann bewiesen werden, daß das Universum V aller Mengen in *Stufen* hierarchisiert ist. Diese Stufen werden durch *Ordinalzahlen* indiziert, die wir oben bereits als Indizes bei Kardinalzahlen wie $\aleph_\omega$ gesehen haben. Die Ordinalzahlen ergeben sich durch transfinite Fortsetzung des Zählprozesses, der mit den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... beginnt. Die ersten transfiniten Ordinalzahlen sind ω, $\omega + 1$, ..., $\omega + \omega$, ... Seit von Neumann ist die Ordinalzahl α nichts anderes als die Menge

[6] Diese Frage ist nur wirklich interessant in der Gegenwart der Existenz großer Kardinalzahlen. Siehe [4]. Woodin gab kürzlich eine interessante Antwort auf diese Frage; siehe §5.

aller kleineren Ordinalzahlen, d.h. $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. Damit ist $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, ..., $\omega = \{0, 1, ...\}$, $\omega + 1 = \{0, 1, ..., \omega\}$, usw. Die Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ ist die α^{te} unendliche Kardinalzahl. In der Tat sind Kardinalzahlen nichts anderes als Ordinalzahlen, zu denen es keine gleichmächtigen Ordinalzahlen gibt, die im transfiniten Zählprozeß zuvor erscheinen.

Ebenso wie die Klasse der Kardinalzahlen ist auch die Klasse der Ordinalzahlen wohlgeordnet: jede nichtleere Menge von Ordinalzahlen enthält ein kleinstes Element. Demnach sind auch die durch Ordinalzahlen indizierten Stufen von V wohlgeordnet. Die Stufen werden durch V_α bezeichnet. V_0 ist die leere Menge; V_α ist $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$. Jede Menge liegt in einem V_α, d.h. $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$.

Das Axiomensystem ZFC hat unendlich viele Axiome. Für jede konkrete endliche Teilmenge Γ von ZFC existieren – beweisbar in ZFC – Stufen V_α, so daß V_α Modell von Γ ist, d.h. so daß jede der Aussagen φ in Γ gilt, wenn man die in φ vorkommenden Quantoren auf den Laufbereich V_α einschränkt. Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz impliziert, daß in ZFC allerdings nicht beweisbar ist, daß eine Stufe V_α existiert, so daß V_α Modell von *allen* Aussagen des Axiomensystems ZFC ist.[7] Man kann dies auch direkter einsehen: Angenommen, ZFC beweist die Existenz einer Stufe α, so daß V_α Modell von ZFC ist. Dann gibt es in V_α ein V_β, so daß V_β Modell von ZFC ist, usw. D.h. man findet eine Menge $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von Ordinalzahlen, so daß $V_{\alpha_{n+1}} \in V_{\alpha_n}$, d.h. $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, für alle n; dann hat aber $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kein kleinstes Element.

Obwohl die Existenz von Stufen V_α, die Modelle von ZFC sind, nicht in ZFC beweisbar ist, können derartige Stufen V_α natürlich dennoch *existieren*.

Man könnte eine Kardinalzahl κ als *groß* bezeichnen, wenn V_κ Modell *aller* Aussagen des Axiomensystems ZFC ist. Die Existenz einer großen Kardinalzahl ist dann in ZFC nicht beweisbar. Allerdings kann es singuläre Kardinalzahlen κ geben, so daß V_κ Modell von ZFC ist – deshalb ist eine geeignetere Definition des Begriffs "große Kardinalzahl" die folgende. Eine Kardinalzahl κ heißt *unerreichbar* gdw. κ überabzählbar und regulär ist und wenn mit jedem $\alpha < \kappa$ die Kardinalität von V_α echt kleiner als κ ist. Wenn κ unerreichbar ist, dann ist V_κ Modell aller Aussagen von ZFC. Insbesondere läßt sich die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl nicht in ZFC beweisen. Eine große Kardinalzahl wäre eine solche, die jedenfalls unerreichbar ist. Unerreichbare Kardinalzahlen sind "exorbitant" im Sinne Hausdorffs.

Neben Hausdorff haben Zermelo und auch P. Mahlo sehr früh derartige Kardinalzahlen betrachtet. Ein bedeutender Anstoß zur Beschäftigung mit großen Kardinalzahl kam aus der Maßtheorie.

Das Vitalische Gegenbeispiel zeigt, daß es kein translationsinvariantes nicht-

[7] Aufgrund des Kompaktheitssatzes und des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes ist in ZFC nicht einmal beweisbar, daß V zu jeder endlichen Teilmenge von ZFC ein Modell enthält.

triviales σ-additives Maß auf $[0,1]$ geben kann (d.h. daß kein derartiges Maß alle Teilmengen von $[0,1]$ messen kann). Man kann aber fragen, ob es ein (nicht translationsinvariantes) nichttriviales σ-additives Maß auf $[0,1]$ gibt, welches etwa das Lebesgue-Maß fortsetzt.

Eine Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ heißt *meßbar* gdw. es ein nichttriviales $< \kappa$-additives zweiwertiges Maß auf κ gibt. Ulam hat 1930 bewiesen, daß jede meßbare Kardinalzahl unerreichbar ist. Damit läßt sich die Existenz meßbarer Kardinalzahlen nicht in ZFC zeigen. Allerdings haben erst in den 60er Jahren Keisler und Tarski mit modelltheoretischen Methoden gesehen, *wie* groß meßbare Kardinalzahlen wirklich sind. Beispielsweise sind meßbare Kardinalzahlen größer als all diejenigen, die Mahlo eingeführt hatte.

§3. Unvollständigkeit.

Gödels Vollständigkeitssatz sagt, daß eine Aussage φ genau dann in einer Theorie T bewiesen werden kann, wenn jedes Modell von T auch ein Modell von φ ist. (Siehe [6].) Eine Aussage ist also aus den Axiomen von ZFC beweisbar dann und nur dann, wenn diese Aussage in jedem Modell von ZFC gilt. Stärkere Beweisbarkeitsbegriffe resultieren daraus, daß man die Klasse der Testmodelle einschränkt (z.B. auf solche, die keine Nichtstandard-natürlichen Zahlen enthalten). Wir werden später einen sehr starken derartigen Beweisbegriff sehen, der aus jüngsten mengentheoretischen Forschungen erwachsen ist.

Eine metamathematisch zentrale Einsicht ist Gödels Unvollständigkeitssatz, den wir nun genauer ansehen wollen.

Eine *Turing-Maschine* ist das mathematische Modell eines Computers. Gemäß eines (endlichen) Programms führt eine solche Maschine bei Eingabe eines "Wortes" (also etwa einer endlichen Ziffernfolge) eine Abfolge von Rechenschritten durch; diese Berechnung führt dazu, daß die gegebene Maschine – falls die Berechnung nach endlich vielen Schritten endet – die vorgelegte Eingabe entweder *akzeptiert* oder *verwirft*. Sei T eine Turing-Maschine. Wir schreiben $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \downarrow +$, falls T die Eingabe w akzeptiert, $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \downarrow -$, falls T die Eingabe w verwirft, und $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \uparrow$ falls T bei Eingabe von w nicht hält. Das *Halteproblem* fragt, ob bei gegebenem T und w gilt, daß $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \downarrow +$ oder ob gilt, daß $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \downarrow -$ oder $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \uparrow$.

Jede Turing-Maschine T läßt sich durch ein Wort $\ulcorner \mathsf{T} \urcorner$ "kodieren". Es gibt eine *universelle* Turing-Maschine, die bei Eingabe von $\ulcorner \mathsf{T} \urcorner, \mathsf{w}$ die Berechnung von T bei Eingabe von w simuliert. Man kann fragen, ob das Halteproblem "lösbar" ist, d.h. ob es eine Turing-Maschine H gibt, so daß $\mathsf{H}(\ulcorner \mathsf{T} \urcorner, \mathsf{w}) \downarrow +$ gdw. $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \downarrow +$ und $\mathsf{H}(\ulcorner \mathsf{T} \urcorner, \mathsf{w}) \downarrow -$ gdw. $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \downarrow -$ oder $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \uparrow$. Falls ein solches H existierte, dann gäbe es auch ein H', so daß $\mathsf{H}'(\ulcorner \mathsf{T} \urcorner) \downarrow +$ gdw. $\mathsf{H}(\ulcorner \mathsf{T} \urcorner, \ulcorner \mathsf{T} \urcorner) \downarrow -$. Dann wäre aber $\mathsf{H}'(\ulcorner \mathsf{H}' \urcorner) \downarrow +$ gdw. $\mathsf{H}(\ulcorner \mathsf{H}' \urcorner, \ulcorner \mathsf{H}' \urcorner) \downarrow -$ gdw. $\mathsf{H}'(\ulcorner \mathsf{H}' \urcorner) \downarrow -$ oder $\mathsf{H}'(\ulcorner \mathsf{H}' \urcorner) \uparrow$.

Das Halteproblem ist also nicht lösbar. Nun kann die Aussage $\mathsf{T}(\mathsf{w}) \downarrow +$ als Σ^0_1 Aussage hingeschrieben werden.[8] Es kann gezeigt werden, daß jede wahre Σ^0_1 Aussage in der Peano-Arithmetik (bzw. in einem schwachen Fragment derselben) bewiesen werden kann. Da das Halteproblem nicht lösbar ist, kann es aber auch keine Turing-Maschine geben, die eine vorgelegte Σ^0_1 Aussage genau dann akzeptiert (verwirft) wenn diese wahr (falsch) ist.

Damit muß es nun aber wahre Π^0_1 Sätze geben, die nicht in der Peano-Arithmetik (und nicht einmal in ZFC oder einer wahren rekursiv aufzählbaren[9] Erweiterung von ZFC) beweisbar sind: andernfalls könnte man den Wahrheitswert einer vorgelegten Σ^0_1 Aussage φ so durch eine Turing-Maschine entscheiden, daß man systematisch alle Beweise in der Peano-Arithmetik (in ZFC) durchgeht und sieht, ob φ oder die Negation von φ bewiesen wird.

Die Tasache, daß es derartige Π^0_1 Sätze gibt, ist der für uns wichtige Gehalt des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes. (Siehe [7].) Jede rekursiv aufzählbare konsistente Erweiterung von ZFC ist in diesem starken Sinne *unvollständig.* Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz lehrt uns, daß es Aussagen gibt, die ebenso gerechtfertigt und wahr sind wie ZFC selbst, die aber in ZFC nicht beweisbar sind: so etwa die Aussage "ZFC ist konsistent". Die Beweisbarkeit einer Aussage in einer gegebenen (wahren) Theorie ist nur hinreichend, nicht aber notwendig, für die Wahrheit dieser Aussage!

Allerdings muß gesagt werden, daß ZFC (und in der Tat bereits weitaus schwächere Systeme als ZFC) bezüglich "natürlicher" arithmetischer Aussagen vollständig zu sein scheint: es wurde noch niemals von einer von Zahlentheoretikern studierten Aussage sodann gezeigt, daß diese nicht auf der Basis von ZFC entschieden werden kann.[10]

Im Verlauf des 20. Jahrhunderts wurde jedoch eine endlose Fülle natürlicher *nichtarithmetischer* Aussagen gefunden, die von ZFC unabhängig sind. Insbesondere hat sich herausgestellt, daß CH von ZFC unabhängig ist.

1938 hat Gödel bewiesen, daß man in ZFC nicht die Existenz eines Gegenbeispiels zu CH zeigen kann. (Siehe [8].) Ebenso wichtig wie das Resultat selbst ist die Methode, die Gödel entwickelte, um dieses Resultat zu erlangen: die Methode der

[8] Eine Aussage ist Σ^0_1 gdw. sie von der Gestalt $\exists n \in \mathbb{N}\ \varphi$ ist, wobei die arithmetische Aussage φ nur beschränkte Quantoren der Form $\forall m < m'$ und $\exists m < m'$ enthält. Eine Aussage ist Π^0_1 gdw. sie logisch äquivalent zur Negation einer Σ^0_1 Aussage ist. Z.B. ist Fermats Letzter Satz eine Π^0_1 Aussage.

[9] Eine Menge ist rekursiv aufzählbar gdw. sie die Menge der "Ausgaben" einer gegebenen Turing-Maschine bei variierender Eingabe ist.

[10] Das heißt, daß von Aussagen des Typs der Goldbachschen Vermutung – die übrigens auch Π^0_1 ist – noch niemals gezeigt wurde, daß sie von ZFC unabhängig sind. H. Friedman hat im Anschluß an Paris-Harrington [14] viele zahlentheoretische Aussagen isoliert, die von ZFC unabhängig sind, die allerdings nicht vorher unabhängig von Zahlentheoretikern betrachtet wurden.

Konstruktion *innerer Modelle*. Ausgehend von einem beliebigen Modell M von ZFC konstruiert Gödel explizit eine Teilklasse L von M und zeigt, daß L die Tatsache, Modell von ZFC zu sein, von M erbt, daß aber zusätzlich L auch Modell von CH ist. L kann als das $\subset$-minimale $\bar{M} \subset M$ charakterisiert werden, so daß $\bar{M}$ Modell von ZFC ist und alle Ordinalzahlen von M enthält. Man benötigt allerdings eine konkretere Beschreibung von L um zeigen zu können, daß ein solches $\subset$-minimales Modell überhaupt existiert. Seit den 60er Jahren hat sich vor allem R. B. Jensen hinsichtlich derartiger feinstruktureller Analysen von L (und verwandter Modelle) verdient gemacht.

1963 hat P. Cohen bewiesen, daß man in ZFC nicht CH zeigen kann. (Siehe [2].) Seine Methode konstruiert "äußere" Modelle; der gängige Name ist allerdings *Forcing* ("Erzwingungsmethode").

Ein Modell der Mengenlehre hat die Form (M, E). Hierbei ist M das Universum des Modells und $E \subset M \times M$ interpretiert die $\in$ Relation. Obwohl es nicht notwendig ist, so ist es doch für das Forcing zweckmäßig anzunehmen, daß M transitiv ist (d.h. $x \in M \Rightarrow x \subset M$) und daß E die Einschränkung der wirklichen $\in$ Relation auf M ist, d.h. $(M, E) = (M, \in\restriction M)$. Dann ist z.B. die Menge der reellen Zahlen aus der Sicht des Modells die Menge aller (wirklichen) reellen Zahlen, die Elemente von M sind. Wenn also etwa M abzählbar ist, so hat M auch nur abzählbar viele relle Zahlen, aber da $(M, \in\restriction M)$ Modell von ZFC ist, glaubt $(M, \in\restriction M)$ natürlich, daß es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt.

Aufgrund des Satzes von Löwenheim-Skolem existiert ein Modell $(M, \in\restriction M)$ von ZFC genau dann, wenn es ein abzählbares solches gibt. Cohen gelingt es nun mit Hilfe seiner Methode, eine Sequenz $\vec{r} = (r_i : i < \aleph_2^M)$ zu wählen und so zu $(M, \in\restriction M)$ zu adjungieren, daß in der Modellerweiterung $(M[\vec{r}], \in\restriction M[\vec{r}])$ wiederum ZFC gilt und zusätzlich ebendiese Sequenz $\vec{r}$ bezeugt, daß CH falsch ist.[11]

Cohens Methode erlaubt es auch, ausgehend von einem abzählbaren Modell $(M, \in\restriction M)$ von ZFC eine Modellerweiterung $(M[c], \in\restriction M[c])$ zu finden, in der $\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH}$ gilt. Durch Forcing kann also CH sowohl "ein-" als auch "ausgeschaltet" werden.

Gödel initiierte das Programm, ZFC durch Hinzunahme von Postulaten, die die Existenz großer Kardinalzahlen ausdrücken, zu "vervollständigen". Insbesondere hatte Gödel vermutet, daß geeignete große Kardinalzahlen eine Antwort auf die Frage liefern sollten, ob CH eine wahre Aussage ist oder nicht. Gödels Programm war, eine Aussage φ zu finden, die die Existenz einer großen Kardinalzahl ausdrückt, so daß in $\mathsf{ZFC} + \varphi$ entweder CH oder die Negation von CH bewiesen wird. Obwohl

[11] Hierbei ist $\aleph_2^M$ das $\aleph_2$ aus der Sicht des Modells $M = (M, \in\restriction M)$. Es ist wichtig zu zeigen, daß $\aleph_2^M$ auch das $\aleph_2$ in der Modellerweiterung bleibt, d.h. $\aleph_2^M = \aleph_2^{M[\vec{r}]}$, so daß dann $\vec{r}$ bezeugt, daß CH in $M[\vec{r}]$ falsch ist.

Gödel vor dem Erscheinen Cohens noch nicht wissen konnte, daß CH von ZFC unabhängig ist, so vermutete er dies doch; er war der Auffassung, daß es $\aleph_2$ viele reelle Zahlen gäbe. Angesichts moderner Entwicklungen, die in §5 und §6 dargestellt werden, stellt sich dieses "Vorurteil" bezüglich der Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ als überraschend vorausblickend dar. Zugleich muß aber gesagt werden, daß Gödels Programm, CH mit Hilfe großer Kardinalzahlen entscheiden zu wollen, sich in dieser direkten Form nachweislich als nicht durchführbar herausstellt. Mit Hilfe der Cohenschen Forcing-Methode konnten Levy und Solovay zeigen, daß große Kardinalzahlen sowohl mit CH als auch mit der Negation von CH verträglich sind.[12]

Es ist nicht schwer einzusehen, daß CH als Aussage der Form $\exists X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ \varphi(X)$ geschrieben werden kann, wobei alle weiteren Quantoren in φ auf $\mathbb{R}$ (oder sogar $\mathbb{N}$) beschränkt sind. ZFC ist vollständig bezüglich "natürlicher" arithmetischer Aussagen, und ZFC ist unvollständig bezüglich CH. Gibt es "natürliche" *projektive* Aussagen,[13] d.h. Aussagen, deren Komplexität zwischen derjenigen arithmetischer und derjenigen von CH liegen, bezüglich derer ZFC unvollständig ist? Wir werden sogleich projektive Aussagen sehen, bezüglich derer Gödels Programm direkt durchführbar ist, d.h. die mit Hilfe großer Kardinalzahlen entschieden werden können.

Nachdem Cohen seine Methode entdeckt hatte, wurde diese auf unzählige vorliegende Probleme der Mengenlehre angewandt. Sehr bald hat R. Solovay gezeigt, daß zu einem (abzählbaren) Modell $(M, \in\restriction M)$ von ZFC + "es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl" eine Forcing-Modellerweiterung der Form $(M[A], \in\restriction M[A])$ existiert, in der jede überabzählbare "definierbare" Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt. Genauer gesagt gilt in Solovays Modell, daß beispielsweise jede überabzählbare projektive Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt, so daß es kein projektives Gegenbeispiel zu CH geben kann. Eine Menge ist *projektiv* wenn sie durch endlich viele Schritte von Projektion und Komplementbildung aus einer Borelmenge im $\mathbb{R}^k$ gewonnen werden kann.[14] Analytische Mengen sind also auf der untersten Stufe der Hierarchie projektiver Mengen.

Gödel hatte 1938 bewiesen, daß in seinem inneren Modell L projektive Mengen reeller Zahlen ohne perfekte Teilmengen existieren. Specker hat diese Aussage 1957 deutlich verschärft, indem er zeigen konnte, daß die Kardinalzahl $\aleph_1$ aus der Sicht des Gödelschen Modells L unerreichbar ist, falls jede überabzählbare projektive Menge

[12] Man sollte erwähnen, daß M. Foreman ein Szenario vorschlägt, CH mit Hilfe "verallgemeinerter großer Kardinalzahlen" zu beweisen. Siehe [3]. Leider kann auf diesen Vorschlag hier nicht eingegangen werden.

[13] Eine Aussage ist projektiv gdw. alle in ihr vorkommenden Quantoren auf $\mathbb{R}$ (oder sogar $\mathbb{N}$) beschränkt sind.

[14] Man sieht leicht, daß eine Menge projektiv ist gdw. sie durch eine projektive Formel definiert werden kann.

reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt.

Die Aussage, eine gegebene überabzählbare projektive Menge reeller Zahlen habe eine perfekte Teilmenge, ist eine projektive Aussage. Diese ist nicht nur unabhängig von ZFC, ihre Wahrheit impliziert sogar, daß es eine große Kardinalzahl in einem inneren Modell gibt.

Die Ergebnisse von Solovay und Specker illustrieren die in technischer Hinsicht vielleicht bedeutendste Rolle, die große Kardinalzahlen in der modernen Mengenlehre einnehmen. Zwei Aussagen φ und ψ heißen *äquikonsistent* (modulo ZFC), wenn die Konsistenz von ZFC$+\varphi$ die Konsistenz von ZFC$+\psi$ impliziert und umgekehrt. Es ist nun eine erstaunliche empirische Tatsache, daß jede natürliche mengentheoretische Aussage äquikonsistent ist zu einer Aussage, die die Existenz großer Kardinalzahlen behauptet. Dies führt dazu, daß die natürlichen mengentheoretischen Aussagen hinsichtlich ihrer "Konsistenzstärke" (d.h. derjenigen äquikonsistenten Aussage über die Existenz großer Kardinalzahlen) wohlgeordnet sind. CH und die Negation von CH haben beide Konsistenzstärke 0, aber die Aussage, wonach jede überabzählbare projektive Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge hat, besitzt "es existiert eine unerreichbare Kardinalzahl" als Konsistenzstärke.

Die Konsistenzstärke einer Aussage sagt nichts über ihren Wahrheitswert. Aber die *Methode* der Ermittlung der Konsistenzstärke kann doch etwas über die Plausibilität der gegebenen Aussage mitteilen. Typischerweise erfolgt die eine Richtung des Äquikonsistenzbeweises durch Forcing, die andere durch innere Modelle.[15]

Ist diese Aussage, daß es kein projektives Gegenbeispiel zu CH geben kann, nun eine *wahre* Aussage? Der Schlüssel zur Anwort verbirgt sich im Begriff der "Determiniertheit".

§4. Determiniertheit.

Das Resultat von Souslin (siehe §1) besagt, daß analytische Mengen kein Gegenbeispiel zur Kontinuumshypothese CH liefern können. Wie steht es mit *koanalytischen* Mengen, d.h. Komplementen analytischer Mengen? An dieser Frage lassen sich wesentliche Aspekte der modernen Mengenlehre illustrieren.

Sei $A \subset [0,1]$. Betrachten wir das folgende Spiel, $G(A)$. Zwei Spieler, I und II, spielen abwechselnd je ein Element k_n der Menge $\{0,1\}$. Das Spiel ist unendlich lang, und wenn es vorüber ist, dann haben die beiden Spieler eine unendliche 0-1-Folge produziert:

[15] Die Innere-Modelltheorie-Richtung erfordert die Konstruktion einer Klasse von Modellen, sogenannter *Kernmodelle*, die Gödels L verallgemeinern. Dieses technisch sehr anspruchsvolle Unterfangen wurde vor allem durch R. B. Jensen, T. Dodd, W. Mitchell, J. Steel und W. H. Woodin vorangetrieben.

I	k_0		k_2		$\cdots$	
II		k_1		k_3		$\cdots$

Wir sagen, daß I gewinnt gdw. die produzierte 0-1-Folge ein Element der vorgelegten Menge A kodiert, d.h. wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{2^{n+1}} \in A.$$

Derartige Spiele wurden zuerst 1953 von Gale und Stewart untersucht. Einige solcher Spiele sind determiniert. Man sagt, daß I eine Gewinnstrategie hat gdw. I eine Strategie besitzt, so daß jeder Spielverlauf, in dem I dieser Strategie folgt, einen Code für eine reelle Zahl produziert, die in A liegt. Analog definiert man die Aussage, daß II eine Gewinnstrategie hat. Das Spiel $G(A)$ (oder auch die Menge A selbst) heißt *determiniert* gdw. einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.

Es hat sich herausgestellt, daß Determiniertheitsannahmen und Annahmen zur Existenz großer Kardinalzahlen in Wahrheit zwei Seiten ein und derselben Medaille sind.

Die Bedeutung von Determiniertheitsannahmen ist für uns zunächst die folgende. Davis hat 1964 folgendes gezeigt: wenn Γ eine "vernünftig abgeschlossene" Klasse von Teilmengen von $[0, 1]$ ist, dann impliziert die Aussage, daß jedes $A \in \Gamma$ determiniert ist, daß jedes überabzählbare $A \in \Gamma$ eine perfekte Teilmenge besitzt. Dies bedeutet, daß die Determiniertheit aller Mengen in Γ bedingt, daß Mengen in Γ keine Gegenbeispiele zu CH stellen können.

D. Martin hat bewiesen, daß jede Borelmenge determiniert ist. Dieser Beweis wird in ZFC geführt und liefert sodann auch einen neuen umständlicheren Beweis des Hausdorff/Alexandrovschen Resultates, wonach jede überabzählbare Borelmenge eine perfekte Teilmenge besitzt.

D. Martin hat nun aber 1970 auch bewiesen, daß jedes koanalytische $A \subset [0, 1]$ determiniert ist – unter der Voraussetzung, daß eine meßbare Kardinalzahl existiert. (Siehe [11].) Aufgrund des Satzes von Davis kann es also in der Gegenwart meßbarer Kardinalzahlen keine koanalytischen Gegenbeispiele zu CH geben.

Diese Erkenntnis wurde in den späten 80er Jahren auf spektakuläre Art und Weise verallgemeinert. Eine Kardinalzahl κ ist eine *Woodin-Zahl* wenn die Stufe V_κ sehr starke Reflektionseigenschaften besitzt.[16] Martin und Steel haben bewiesen: wenn es unendlich viele Woodin-Zahlen gibt, dann ist jede projektive Menge reeller Zahlen determiniert. (Siehe [12].) Das Resultat von Martin und Steel besagt dann aufgrund der Aussage von Davis, daß es in der Gegenwart von unendlich vielen

[16] Die formale Definition von "κ ist Woodin" ist für uns nicht wichtig. Unterhalb einer Woodin-Zahl κ existieren κ viele meßbare Kardinalzahlen.

Woodin-Zahlen kein projektives Gegenbeispiel zu CH geben kann – genauer gesagt, daß es kein projektives $A \subset \mathbb{R}$ mit $\mathbb{N} < A < \mathbb{R}$ gibt. Die aufgeklärte Version von Cantors Idee zum Beweis von CH wurde damit durchgeführt – jedenfalls unter Zuhilfenahme großer Kardinalzahlen.

Doch es gilt mehr. Wir wollen mit PD ("Projektive Determiniertheit") die Annahme bezeichnen, daß jedes projektive $A \subset [0,1]$ determiniert sei. Ebenso wie ZFC (oder bereits sehr schwache Fragmente davon) vollständig bezüglich "natürlicher" arithmetischer Aussagen zu sein scheint, so erscheint nun $\mathsf{ZFC} + \mathsf{PD}$ als vollständig bezüglich "natürlicher" projektiver Aussagen. Beispielsweise impliziert $\mathsf{ZFC} + \mathsf{PD}$, daß jede projektive Menge reeller Zahlen Lebesgue-meßbar ist und die Eigenschaft von Baire besitzt und daß jede projektive Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ durch eine projektive Funktion uniformisiert werden kann.[17]

Wir haben gesehen, daß die Existenz großer Kardinalzahlen (genauer: die Existenz von Woodin-Zahlen) PD beweist. Man kann mit Hilfe von Gödels Methode der inneren Modelle zeigen, daß umgekehrt PD die Existenz von Woodin-Zahlen in inneren Modellen liefert. Die Theorie $\mathsf{ZFC} + \mathsf{PD}$ ist also in Wahrheit eine Theorie, die die Existenz großer Kardinalzahlen (in inneren Modellen) postuliert.

Es gibt kompliziertere "definierbare" Mengen als es die projektiven Mengen sind. Beispielsweise die "hyperprojektiven" Mengen, die im $\subset$-minimalen inneren Modell $L(\mathbb{R})$ liegen, das alle reellen Zahlen enthält. Gegenwärtig könnte man den Begriff "definierbare Menge reeller Zahlen" als durch "universell Bairesch" expliziert ansehen. $A \subset \mathbb{R}$ ist universell Bairesch gdw. für jede stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, wobei X ein topologischer Raum ist, das Urbild von A unter f die Bairesche Eigenschaft in X hat. Unter der Annahme der Existenz einer echten Klasse von Woodin-Zahlen ist $A \subset \mathbb{R}$ universell Bairesch gdw. A homogen Souslinsch ist. Der Beweis von D. Martin, wonach koanalytische Mengen determiniert sind, zeigt in Wahrheit, daß alle homogen Souslinschen Mengen – und damit *alle* "definierbaren" Mengen – determiniert sind.

Ist PD eine wahre Aussage? Die Tatsache, daß $\mathsf{ZFC} + \mathsf{PD}$ vollständig bezüglich "natürlicher" projektiver Aussagen ist, kann alleine noch nicht für die Wahrheit von PD sprechen, da auch die Aussage $V = L$ (d.h. das Universum aller Mengen ist identisch mit Gödels innerem Modell) diese Vollständigkeitseigenschaft besitzt. Wir haben uns dem Begriff der "Absolutheit" zuzuwenden.

§5. Absolutheit.

Man kann fragen, wie sich der Wahrheitswert gegebener Aussagen φ verhält,

[17]Woodin hatte 1981 die Vermutung ausgesprochen, daß diese Konsequenz aus PD in Wahrheit äquivalent zu PD ist. 1997 widerlegte J. Steel diese Vermutung. Mittlerweile wurde die Konsistenzstärke dieser Konsequenz aus PD exakt berechnet; cf. [15].

wenn man von V zu einer generischen Erweiterung von V übergeht. Beispielsweise bleibt der Wahrheitswert einer arithmetischen Aussage unverändert, da Forcing keine neuen natürlichen Zahlen hinzufügt. Der Satz von Shoenfield impliziert, daß sogar der Wahrheitswert von Σ^1_2 Aussagen beim Übergang zu generischen Erweiterungen von V beibehalten bleibt.[18] Dies ist optimal insofern, als ZFC *nicht* beweist, daß der Wahrheitswert komplizierterer projektiver Aussagen beim Übergang zu generischen Erweiterungen von V beibehalten bleibt.

Man sagt, V sei *projektiv absolut* gdw. der Wahrheitswert beliebiger projektiver Aussagen beim Übergang zu Forcing-Erweiterungen von V beibehalten bleibt. Wenn es eine echte Klasse von Woodin-Zahlen gibt, dann ist V projektiv absolut.

Es gilt sogar mehr: Wir wollen sagen, V sei *hyperprojektiv absolut* gdw. die Theorie von $L(\mathbb{R})$, d.h. des $\subset$-minimalen inneren Modells, das alle reellen Zahlen enthält, beim Übergang zu Forcing-Erweiterungen von V beibehalten bleibt. Wenn es eine echte Klasse von Woodin-Zahlen gibt, dann ist V hyperprojektiv absolut.

Woodin hat nun die folgende erstaunliche Aussage bewiesen: wenn V hyperprojektiv absolut ist, dann gilt Projektive Determiniertheit. Dies bedeutet, das Credo, V solle hyperprojektiv absolut sein, verpflichtet dazu, Projektive Determiniertheit und alle Konsequenzen aus Projektiver Determiniertheit anzunehmen. Da PD bezüglich "natürlicher" projektiver Aussagen vollständig zu sein scheint, legt die Annahme, V sei hyperprojektiv absolut, den Wahrheitswert "natürlicher" projektiver Aussagen fest.

Projektive Absolutheit bzw. hyperprojektive Absolutheit ist somit sicherlich ein guter Rahmen für die Wahl einer Theorie. Man sagt, diejenigen "natürlichen" projektiven Aussagen seien wahr, die unter der Annahme gelten, der Wahrheitswert (hyper-)projektiver Aussagen könne nicht durch Forcing geändert werden. Da hyperprojektive Absolutheit insbesondere PD impliziert und da PD wiederum die Existenz von Woodin-Zahlen in inneren Modellen impliziert, so ist das Bewegen im Rahmen von hyperprojektiver Absolutheit eines im Rahmen großer Kardinalzahlen.

Man kann die Idee, ZFC durch Absolutheitsannahmen zu "vervollständigen" auch jenseits projektiver Aussagen vorantreiben. Insbesondere können wir zu Aussagen der Komplexität von CH vorstoßen.

Arithmetische Aussagen sprechen über natürliche Zahlen. Projektive Aussagen sprechen über reelle Zahlen, die als Teilmengen von $\mathbb{N}$ und damit auch als Teil-

[18]Da V *alle* Mengen enthält, gibt es natürlich strenggenommen gar keine nichttrivialen generischen Erweiterungen von V. Anstelle über (den Wahrheitswert von Aussagen in) generische(n) Erweiterungen von V zu sprechen, sollten wir also eigentlich über (den Wahrheitswert von Aussagen in) generische(n) Erweiterungen von hinreichend elementaren transitivierten abzählbaren Substrukturen von V sprechen. Eine Aussage ist Σ^1_2 gdw. sie in der Form $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \varphi$ geschrieben werden kann, wobei φ arithmetisch ist. Jede Σ^1_2 Aussage ist also projektiv.

mengen von $\aleph_0$ kodiert werden können. Wenn wir hinsichtlich CH zunächst neutral bleiben wollen, dann sollten Aussagen des nächsthöheren Komplexitätsgrades solche sein, die über Teilmengen von $\aleph_1$ sprechen, d.h. solche, in denen alle Quantoren auf Teilmengen von $\aleph_1$ beschränkt sind. CH kann als Aussage der Form $\exists X \subset \aleph_1\ \varphi$ geschrieben werden, wobei alle in φ vorkommenden Quantoren auf Elemente von $\aleph_1$ und Teilmengen oder gar Elemente von $\aleph_0$ beschränkt sind. Aussagen dieses Typs heißen $\Sigma_1^{\mathcal{P}(\aleph_1)}$.

Da der Wahrheitswert von CH durch Forcing geändert werden kann, kann V nicht absolut bzgl. Aussagen des Typs $\Sigma_1^{\mathcal{P}(\aleph_1)}$ sein. Man kann aber die Klasse der erlaubten Forcings einschränken und verlangen, V sei $\Sigma_1^{\mathcal{P}(\aleph_1)}$ absolut bezüglich Forcing-Erweiterungen, die durch ein Forcing aus der Klasse der erlaubten Forcings gewonnen wurden.

Man gelangt so zu einer Aussage, die "Bounded Martin's Maximum" (kurz BMM) genannt wird. (Siehe [5].) Man sagt, ein Forcing bewahre stationäre Mengen, wenn jede stationäre Teilmenge von $\aleph_1$ auch stationär bleibt in der entsprechenden Forcing-Erweiterung von V.[19] BMM sagt folgendes: wenn das Forcing $\mathbb{P}$ stationäre Mengen bewahrt, dann gilt eine $\Sigma_1^{\mathcal{P}(\aleph_1)}$ Aussage in V gdw. sie in einer (jeder) Forcing-Erweiterung von V gilt, die mittels $\mathbb{P}$ gewonnen wurde.

Es läßt sich zeigen, daß die Klasse der Forcings, die stationäre Mengen bewahren, die "maximale" erlaubte Klasse für ein deratiges Axiom ist.

Nun hat S. Todorcevic 2002 bewiesen, daß BMM die Frage beantwortet, wieviele reelle Zahlen es gibt. (Siehe [18].) Todorcevic zeigt, daß unter BMM eine Bijektion $f\colon \mathbb{R} \to \aleph_2$ existiert, so daß $\{(x,y) | f(x) \leq f(y)\}$ definierbar über $\mathcal{P}(\aleph_1)$ ist.[20] Womöglich liefert BMM sogar eine lange projektive Präwohlordnung von $\mathbb{R}$ (vgl. §1).

Wir befinden uns unter BMM wieder in einem Kontext großer Kardinalzahlen, da gezeigt wurde, daß BMM die Konsistenz meßbarer Kardinalzahlen liefert. (Siehe [16].)[21] Darüberhinaus entscheidet BMM eine Fülle weiterer interessanter Aussagen (siehe [13]).

Das Axiom BMM ist konsistent mit PD.[22] Wenn ein möglichst hohes Ausmaß an Forcing-Absolutheit ein gutes Kriterium für die Wahl einer Theorie ist, so sollten wir $\mathsf{ZFC} + \mathsf{PD} + \mathsf{BMM}$ für eine gute Wahl halten! Diese Theorie entscheidet alle "natürlichen" projektiven Aussagen, sie verwirklicht Cantors Idee zum induktiven

---

[19] Ein $A \subset \aleph_1$ ist stationär, wenn A in gewisser Weise "dick" ist. Die genaue Definition ist für uns nicht wichtig.

[20] Insbesondere ist dann $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Eine Verstärkung von BMM, nämlich "Martin's Maximum", impliziert aufgrund eines Satzes von Woodin, daß es eine projektive Präwohlordnung von $\mathbb{R}$ der Länge $\aleph_2$ gibt; cf. [19].

[21] Die Frage der Konsistenzstärke von BMM ist eine wichtige offene Frage der gegenwärtigen Mengenlehre.

[22] Es ist gegenwärtig nicht bekannt, ob nicht BMM sogar PD impliziert.

Beweis von CH insofern, als sie zeigt, daß kein projektives A mit $\mathbb{N} < A < \mathbb{R}$ existieren kann, und sie entscheidet dennoch CH negativ, indem sie in einem anderen Sinne ein definierbares Gegenbeispiel zu CH liefert.

Eine ausgefeiltere Argumentation, die Forcing-Absolutheit als Leitfaden der Theoriewahl nimmt und die ebenfalls CH negativ entscheidet, wurde kürzlich durch W. Hugh Woodin entworfen.

§6. Ω-Logik.

In §3 wurde erwähnt, daß ein stärkerer Beweisbegriff daraus resultiert, daß man die Klasse der Testmodelle einschränkt. Aufgrund von Gödels Vollständigkeitssatz ist eine Aussage φ aus einer Theorie T genau dann beweisbar, wenn φ in allen Modellen von T gilt. Wenn man nun etwa sagt, φ sei in einem stärkeren Sinne aus T beweisbar gdw. jedes *transitive* Modell von T auch ein Modell von φ ist, dann beweist ZFC in diesem stärkeren Sinne jede wahre arithmetische (und sogar jede wahre analytische – nicht aber jede wahre Σ^1_2) Aussage.

Da wir davon ausgehen, daß V projektiv absolut ist, d.h. sich der Wahrheitswert projektiver Aussagen beim Übergang zu beliebigen Forcing-Erweiterungen von V nicht ändert, wäre eine gewagte aber sinnvolle Einschränkung der Klasse aller Testmodelle wohl dadurch gegeben zu sagen, φ sei aus ZFC in einem sehr starken Sinne beweisbar gdw. jede Forcing-Erweiterung einer Stufe V_α, die Modell von ZFC ist, auch ein Modell von φ ist. Unter der Voraussetzung Projektiver Absolutheit wäre dann jede wahre projektive Aussage in diesem sehr starken Sinne beweisbar.

Diesen sehr starken Beweisbarkeitsbegriff nennt Woodin "Ω^* Beweisbarkeit". (Siehe [19].) Der natürliche Hintergrund für die Diskussion von Ω^* Beweisbarkeit ist die Theorie ZFC + es gibt eine echte Klasse von Woodin-Zahlen.[23] Vor diesem Hintergrund ist nun etwa PD (und damit alle Konsequenzen von PD) aus ZFC Ω^* beweisbar – allerdings ist PD bereits im üblichen Sinne vor diesem Hintergrund beweisbar. Es gilt jedoch mehr, wenn wir nun im folgenden jederzeit stillschweigend ZFC + es gibt eine echte Klasse von Woodin-Zahlen annehmen.

Die Theorie ZFC ist Ω^* vollständig bezüglich projektiver Aussagen, d.h. für jede projektive Aussage φ gilt, daß entweder φ oder ihre Negation in ZFC Ω^* beweisbar ist. Dies liegt einfach daran, daß V projektiv absolut ist.

Auf der anderen Seite ist ZFC *nicht* Ω^* vollständig bezüglich komplexerer Aussagen. Da der Wahrheitswert von CH durch Forcing geändert werden kann, ist ZFC nicht Ω^* vollständig bezüglich Aussagen des Typs $\Sigma_1^{\mathcal{P}(\aleph_1)}$. Man kann aber fragen,

[23] Die Gegenwart einer echten Klasse von Woodin-Kardinalzahlen erlaubt Argumente mit Hilfe des "stationary tower forcings". Wir hatten bereits gesehen, daß vor diesem Hintergrund jede universell Bairesche Menge determiniert ist.

ob es eine sinnvolle Vervollständigung (im Sinne der Ω^* Logik) von ZFC bezüglich Aussagen dieses Typs oder bezüglich komplexerer Aussagen gibt.

Es tut sich hier eine interessante Asymmetrie auf, die ein weiteres Argument gegen CH sein könnte.

Zunächst jedoch erscheint es wünschenswert, einen Beweisbegriff zur Verfügung zu haben, der nicht auf V bezugnimmt.[24] Dies geschieht mit Hilfe des Begriffs der "Ω Beweisbarkeit". Eine Aussage φ ist Ω beweisbar aus T gdw. jedes hinreichend abgeschlossene Modell von T auch ein Modell von φ ist. Hier kann "M ist hinreichend abgeschlossen" z.B. bedeuten: M ist transitiv, oder: M ist transitiv und zu jedem $x \in M$ gibt es in M ein inneres Modell mit einer meßbaren Kardinalzahl, das x enthält, usw. In technischer Sicht wird die Abgeschlossenheit eines Modells durch gewisse universell Bairesche = homogen Souslinsche Mengen reeller Zahlen bezeugt. Die universell Bairesche Menge "ist" dann der Ω Beweis, die "Länge" des Beweises ist der Wadge-Rang der universell Baireschen Menge.

Nach unserem Kenntnisstand ist die einzige Art und Weise, Forcing-Absolutheit zu zeigen dadurch gegeben, universell Bairesche = homogen Souslinsche Mengen reeller Zahlen zu Hilfe zu nehmen. Dies bedeutet, daß Woodins Begriff der Ω Beweisbarkeit praktisch dem Begriff der Ω^* Beweisbarkeit entsprechen sollte. Formal kann Woodin zeigen: wenn φ Ω beweisbar aus T ist, dann ist φ auch Ω^* beweisbar aus T. Es könnte aber ein Absolutheitsphänomen vorliegen, das nicht in homogen Souslinschen Mengen reeller Zahlen begründet ist – auch wenn wir ein solches Beispiel heute nicht kennen. Woodins Ω *Vermutung* sagt, daß dies *nicht* der Fall ist: wenn φ Ω^* beweisbar aus T ist, dann ist φ auch Ω beweisbar aus T.[25]

Nun hat Woodin gezeigt, daß keine rekursiv aufzählbare Ω konsistente Theorie Ω vollständig bezüglich aller Σ^2_3 Aussagen ist.[26] Dies setzt eine Schranke für das Ziel der Vervollständigung einer Theorie. Womöglich sogar sollte dieses Resultat von Woodin die Frage aufwerfen, ob nicht die Ω Vollständigkeit einer Theorie ein ebenso schlechtes Kriterium für die Wahl einer Theorie ist wie dies (aufgrund des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes) die Vollständigkeit einer Theorie im üblichen Sinne ist.[27] Auf der anderen Seite könnte aber die Existenz dieser Schranke zu einer aufgeklärten Version des Kriteriums der Ω Vollständigkeit als Kriterium der Theoriewahl führen.

Woodin hat gezeigt, daß es eine sinnvolle Erweiterung von ZFC gibt, die Ω

[24] Wenn man die Bezugnahme auf V erlaubt, warum sollte man nicht φ als beweisbar ansehen gdw. V Modell von φ ist?

[25] Diese Ω Vermutung ist eine prominente offene Frage. Woodin hat partielle Resultate, die die Ω Vermutung stützen.

[26] Eine Aussage ist Σ^2_3 gdw. sie von der Gestalt $\exists X \subset \mathbb{R} \forall Y \subset \mathbb{R} \exists Z \subset \mathbb{R}\, \varphi$ ist, wobei φ projektiv ist.

[27] So etwa argumentiert Steel.

vollständig bezüglich Aussagen über Teilmengen von $\aleph_1$ ist. Ein Beispiel hierfür ist die Theorie $\mathsf{ZFC} + L(\mathcal{P}(\aleph_1))$ (d.h. das $\subset$-minimale innere Modell, das $\mathcal{P}(\aleph_1)$ enthält) ist eine $\mathbb{P}_{\max}$ Erweiterung von $L(\mathbb{R})$; hierbei ist $\mathbb{P}_{\max}$ ein Forcing, das von Woodin gefunden wurde. Diese Theorie heißt $\mathsf{ZFC} + (*)$.

Unter $\mathsf{ZFC} + (*)$ gilt PD, so daß es kein projektives Gegenbeispiel $A \subset \mathbb{R}$ mit $\mathbb{N} < A < \mathbb{R}$ zu CH gibt. Andererseits gibt es unter $\mathsf{ZFC} + (*)$ (wie unter BMM) eine Bijektion $f\colon \mathbb{R} \to \aleph_2$, so daß $\{(x,y) | f(x) \leq f(y)\}$ definierbar über $\mathcal{P}(\aleph_1)$ ist – in diesem Sinne existiert also ein einfaches Gegenbeispiel zu CH.

Wenn nun ein möglichst hohes Maß an Ω Vollständigkeit ein gutes Kriterium für die Wahl einer Theorie ist, dann sollte also als Theorie eine Erweiterung T von ZFC gewählt werden, die Ω vollständig bezüglich Aussagen über Teilmengen von $\aleph_1$ ist. Jede solche Theorie impliziert aber die Negation von CH: wenn CH gilt, dann kann jede Menge reeller Zahlen als Teilmenge von $\aleph_1$ kodiert werden, so daß eine Σ^2_3 Aussage im Grunde eine Aussage über Teilmengen von $\aleph_1$ ist; damit wäre dann aber T Ω vollständig bezüglich Σ^2_3 Aussagen, was nach dem oben erwähnten Resultat von Woodin nicht sein kann.

Es ist festzuhalten, daß neuere mengentheoretische Untersuchungen starke Argumente gegen die Cantorsche Kontinuumshypothese liefern. All diese Untersuchungen haben vor dem Hintergrund der Annahme der Existenz großer Kardinalzahlen zu erfolgen – und sie stellen damit doch auch die Durchführung einer Variante des Gödelschen Programms dar, CH mit Hilfe großer Kardinalzahlen zu entscheiden.

Literatur

[1] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen Zahlen*, J. f. Math. **77** (1874), pp. 258-262.

[2] P. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis I*, Proc. Nat. Acad. Sciences USA **50** (1963), pp. 1143-1148.

[3] M. Foreman, *Generic large cardinals, new axioms for mathematics?*, in: Proc. Int. Congress Math., Vol. II, Berlin 1998, pp. 11-21.

[4] M. Foreman and M. Magidor, *Large cardinals and definable counterexamples to the continuum hypothesis*, Ann. Pure Appl. Logic **76** (1995), pp. 47-97.

[5] M. Goldstern and S. Shelah, *The bounded proper forcing axiom*, J. Symbolic Logic **60** (1995), pp. 58-73.

[6] K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte Math. Physik **37** (1930), pp. 349-360.

[7] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der "Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, Monatshefte Math. Physik **38** (1931), pp. 173-198.

[8] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sciences USA **24** (1938), pp. 556-557.

[9] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Gesammelte Werke Bd. **2** (herausgegeben von E. Brieskorn et al.), Springer-Verlag 2002.

[10] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Vortrag vom 8. August 1900 auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris, in: Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse 1900, Heft 3, pp. 253 - 297.

[11] D. Martin, *Measurable cardinals and analytic games*, Fund. Math. **66** (1970), pp. 287-291.

[12] D. Martin and J. Steel, *Projective determinacy*, Proc. Nat. Acad. Sciences USA **85** (1988), pp. 6582-6586.

[13] J. Moore, *Proper forcing, the continuum, and uncountable linear orders*, Bulletin of Symbolic Logic, im Erscheinen.

[14] J. Paris and L. Harrington, *A mathematical incompleteness in Peano arithmetic*, in: Handbook for Mathematical Logic, J. Barwise (ed.), North Holland 1977.

[15] R. Schindler, *The core model for almost linear iterations*, Ann. Pure Appl. Logic **116** (2002), pp. 205-272.

[16] R. Schindler, *Semi-proper forcing, remarkable cardinals, and Bounded Martin's Maximum*, Math. Logic Quarterly **50** (2004), pp. 527-532.

[17] W. Sierpinski, *Les ensembles projectifs et analytiques*, Memorial des Sci. Math. **112** (1950).

[18] Stevo Todorcevic, *Generic absoluteness and the continuum*, Math. Research Letters **9** (2002), pp. 1-7.

[19] W. H. Woodin, *The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal*, de Gruyter 1999.