Kap. 4 Skolem-Funktionen und Projekta

Def. 4.1 Sei M transitiv, und sei $n<\omega$. Für $x_1,\ldots,x_k \in M$ ist $\Sigma_n^M(\{x_1,\ldots,x_k\})$ die Menge aller

$$\{x_0 \in M : M \models \varphi(x_0,x_1,\ldots,x_k)\}$$

für eine Σ_n Formel φ. $\Pi_n^M(\{x_1,\ldots,x_k\})$ ist analog definiert. $\Delta_n^M(\{x_1,\ldots,x_k\}) = \Sigma_n^M(\{x_1,\ldots,x_k\}) \cap \Pi_n^M(\{x_1,\ldots,x_k\})$.

Wir schreiben auch $\underset{\sim}{\Sigma}{}_n^M$ für $\bigcup_{\vec{x}\in M} \Sigma_n^M(\vec{x})$ *) .

Analog sind $\underset{\sim}{\Pi}{}_n^M$ und $\underset{\sim}{\Delta}{}_n^M$ definiert.

Bemerkung: Es gilt also $L_{\alpha+1} = \bigcup_{n<\omega} \underset{\sim}{\Sigma}{}_n^{L_\alpha}$.
$<_\alpha$ bezeichne nach wie vor die auf p. 30 definierte Wohlordnung von L_α.

Lemma 4.2 $\{(x,y) : x,y \in L_\alpha \wedge x <_\alpha y\}$ ist $\Sigma_1^{L_\alpha}$.

Bemerkung: Hier und im folgenden meinen wir mit (x,y) oft $(x,y)_k$, wobei $\alpha = \bar{\alpha}+k$ mit $k<\omega$ und

---

*) Wir schreiben oft abkürzend $\vec{x}$ für $\{x_1,\ldots,x_k\}$ oder für $\{(1,x_1),\ldots,(k,x_k)\}$.

$\bar\alpha$ Limeszahl.

Beweis von 4.2: Sei α gegeben, und sei die Behauptung gezeigt für alle $\beta < \alpha$. 2.19 zeigt die Behauptung für den Fall, daß α Limeszahl ist. Sei nun $\alpha = \bar\alpha + k$ mit $1 \le k < \omega$ und $\bar\alpha$ Limeszahl. Sei $\varphi(v_1, v_2)$ die (Σ_1) Formel mit $x <_{\bar\alpha+k-1} y$ gdw. $L_{\bar\alpha+k-1} \models \varphi(x,y)$.

Dann gilt für $x, y \in L_{\bar\alpha+k}$: $x <_{\bar\alpha+k} y$ gdw.

$$\exists \beta < \alpha \; [(x \in L_\beta \wedge y \in L_\beta \wedge L_\beta \models \varphi(x,y)) \quad \vee$$

$$(x \in L_\beta \wedge y \notin L_\beta) \quad \vee$$

$$(\exists (\ulcorner\varphi_1\urcorner, \vec{z}_1) \in L_\beta \; \exists (\ulcorner\varphi_2\urcorner, \vec{z}_2) \in L_\beta$$

$$(x = \{u \in L_\beta : L_\beta \models \varphi_1(u, \vec{z}_1)\} \wedge$$

$$y = \{u \in L_\beta : L_\beta \models \varphi_2(u, \vec{z}_2)\} \wedge$$

$$\forall (\ulcorner\psi\urcorner, \vec{z}) \in L_\beta \; (L_\beta \models \varphi((\ulcorner\psi\urcorner, \vec{z}), (\ulcorner\varphi_1\urcorner, \vec{z}_1))$$

$$\longrightarrow x \neq \{u \in L_\beta : L_\beta \models \psi(u, \vec{z})\}) \wedge$$

$$\forall (\ulcorner\psi\urcorner, \vec{z}) \in L_\beta \; (L_\beta \models ((\ulcorner\psi\urcorner, \vec{z}), (\ulcorner\varphi_2\urcorner, \vec{z}_2))$$

$$\longrightarrow y \neq \{u \in L_\beta : L_\beta \models \psi(u, \vec{z})\}) \wedge$$

$$L_\beta \models \varphi((\ulcorner\varphi_1\urcorner, \vec{z}_1), (\ulcorner\varphi_2\urcorner, \vec{z}_2)).$$

Mit Hilfe von 3.8, pp. 38 ff. und der Ind. Vor. ist dann leicht zu sehen, daß $\{(x,y) : x,y \in L_\alpha,\ x <_\alpha y\}$ $\Sigma_1^{L_\alpha}$ ist. $\dashv$

Im folgenden fixieren wir, für jedes $n<\omega$, $n\geq 1$, eine rekursive Aufzählung $(\varphi_i^n : i<\omega)$ aller Σ_n Formeln. Wir wollen über L_α Σ_n Skolem-Funktionen definieren.

Sei $n \in \omega \setminus \{0\}$.

<u>Def</u>. 4.3 / Sei $\alpha \geq \omega$, $k > \omega$, $\alpha + k > \omega$, wobei α Limesordinalzahl ist. Eine partielle Funktion

$$\tilde{f} : L_{\alpha+k} \to L_{\alpha+k}$$

heißt eine Σ_n <u>Skolem-Funktion</u> <u>für</u> $L_{\alpha+k}$ gdw. für alle $i<\omega$ folgendes gilt: Sei

$$\varphi_i^n \equiv \exists v_{i_1} \ldots \exists v_{i_\ell}\ \psi,$$

wobei ψ Π_{n-1} ist und (höchstens) die Variablen $v_{i_1}, \ldots, v_{i_\ell}, v_{i_{\ell+1}}, \ldots, v_{i_{\ell^*}}$ frei enthält, seien $x_{i_{\ell+1}}, \ldots, x_{i_{\ell^*}} \in L_{\alpha+k}$, und gelte

$$L_{\alpha+k} \models \varphi_i^n(x_{i_{\ell+1}}, \ldots, x_{i_{\ell^*}})$$

(wobei die Variablen $v_{i_{\ell+1}}, \ldots, v_{i_{\ell^*}}$ mit $x_{i_{\ell+1}}, \ldots, x_{i_{\ell^*}}$ belegt werden; sei $f : \{v_{i_{l+1}}, \dots, v_{i_{l^*}}\} \to L_{\alpha+k}$ mit $f(v_{i_{l+1}}) = x_{i_{l+1}}, \dots, f(v_{i_{l^*}}) = x_{i_{l^*}}$, wobei wie in 3.8 $f \subset \{v_{i_{l+1}}, \dots, v_{i_{l^*}}\} \times_k L_{\alpha+k}$. Dann ist $\tilde{f}(i,f)$ definiert, $\tilde{f}(i,f) : \{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\} \to L_{\alpha+k}$ wie in 3.8, und es gilt

$$L_{\alpha+k} \models \varphi(\tilde{f}(i,f)(v_{i_1}), \dots, \tilde{f}(i,f)(v_{i_l}), x_{i_{l+1}}, \dots, x_{i_{l^*}}).$$

Eine Σ_n Skolem-Funktion wählt also Zeugen für wahre Σ_n Aussagen aus.

<u>Lemma</u> 4.4 Sei $\omega \subset X \subset L_{\alpha+k}$, wobei α, k wie in 4.3 sind. Sei $n \in \omega \setminus \{0\}$. Sei X abgeschlossen unter einer Σ_n Skolem-Funktion $\tilde{f}$ für $L_{\alpha+k}$ (d.h. $f \in L_{\alpha+k}$, $\tilde{f}(i,f)$ definiert, $\tilde{f}(i,f) : \{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\} \to L_{\alpha+k}$ und $f \in X$ impliziert $\tilde{f}(i,f)(v_{i_1}), \dots, \tilde{f}(i,f)(v_{i_l}) \in X$).
Dann gilt

$$X \prec_{\Sigma_n} L_{\alpha+k} \quad {}^{*)}$$

Beweis: Einfach. Man benutzt Induktion nach der Formelkomplexität. $\dashv$

---

*) d.h. X ist ein Σ_n elementares Submodell von $L_{\alpha+k}$.

<u>Lemma</u> 4.4′ Sei M transitiv und $M \models BS^k$ für ein $k < \omega$. Sei $n \in \omega \setminus \{0\}$. Die Formel

„ e ist die Gödelnummer einer Σ_n Formel φ, die die Variablen $v_{i_1}, \ldots, v_{i_\ell}$ frei enthält, $f : \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_\ell}\} \longrightarrow M$, und es gilt $M \models \varphi[\beta]$ für eine / jede M-Belegung β mit $\beta(v_{i_1}) = f(v_{i_1}), \ldots, \beta(v_{i_\ell}) = f(v_{i_\ell})$ " ist $\Sigma_n^{BS^k}$.

Beweis: ~~Wir benutzen 3.8. Sei zunächst n=1.~~ ~~Dann gilt $M \models \varphi[\beta]$ gdw~~ Im Falle $n = 1$ kann man 3.8 benutzen.

Sei nun $n > 1$, und sei die Behauptung gezeigt für n. Sei $\Psi_n(e, f)$ die fragliche Formel. Sei $\varphi \equiv \exists v_{i_{\ell+1}} \ldots \exists v_{i_{\ell^*}} \psi$, wobei ψ Π_n ist, und sei $f : \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_\ell}\} \to M$. Dann gilt

$$M \models \varphi(f(v_{i_1}), \ldots, f(v_{i_\ell})) \quad \text{gdw.}$$

$$M \models \exists v_{i_{\ell+1}} \ldots \exists v_{i_{\ell^*}} \psi(f(v_{i_1}), \ldots, f(v_{i_\ell})) \quad \text{gdw.}$$

$$M \models \exists g : \{v_{i_{\ell+1}}, \ldots, v_{i_{\ell^*}}\} \to M \ \psi(f(v_{i_1}), \ldots, f(v_{i_\ell}), g(v_{i_{\ell+1}}), \ldots, g(v_{i_{\ell^*}}))$$

gdw. $M \models \exists g \neg \Psi_n(\ulcorner \psi \urcorner, f^\frown g)$.

Damit zeigt man die Behauptung für $n+1$. $\dashv$

<u>Def.</u> 4.5 Sei M transitiv. Eine partielle Funktion $f : M \to M$ ist $\Sigma/\Pi/\Delta_n^M(\{\vec{z}\})$ gdw. ihr Graph von der entsprechenden Komplexität ist, d.h. wenn $\{(x,y) : f(x)=y\}$ $\Sigma/\Pi/\Delta_n^M(\{\vec{z}\})$ ist.

<u>Satz</u> 4.6 Sei $\alpha \geq \omega$ eine Limesordinalzahl, sei $k < \omega$, $\alpha + k > \omega$. Sei $n \in \omega \setminus \{0\}$. Dann existiert eine Σ_n Skolem-Funktion $\tilde{f}$ für $L_{\alpha+k}$, die $\Pi_n^{L_{\alpha+k}}(\emptyset)$ ist.

Beweis: Wir setzen

$$\tilde{f}(i,f) = \begin{cases} \text{das } <_{\alpha+k}\text{-kleinste } g \text{ mit } L_{\alpha+k} \models \psi[g^\frown f], \\ \text{falls } \varphi_i^n \equiv \exists v_{i_1} \ldots \exists v_{i_\ell}\, \psi \text{ für } \psi\ \Pi_{n-1} \\ \text{und ein solcher } g \text{ existiert,} \\ \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\tilde{f}(i,f) = g$ gdw: wenn $\varphi_i^n \equiv \exists v_{i_1} \ldots \exists v_{i_\ell}\, \psi$, wobei ψ Π_{n-1} ist, dann

$L_{\alpha+k} \models \psi[g^\frown f] \wedge \forall \bar{g}\, (\bar{g} <_{\alpha+k} g \to \neg \psi[\bar{g}^\frown f])$.

Die Behauptung folgt mit 4.4′ und 4.2. $\dashv$

<u>Def.</u> 4.7 Seien α, k, n wie in 4.6. Wir schreiben $h_n^{\alpha+k}$ für die im Beweis von 4.6 definierte Σ_n Skolem-Funktion für $L_{\alpha+k}$.
Sei $\omega \subset X \subset L_{\alpha+k}$. Wir schreiben dann

$$h_n^{\alpha+k} \text{''} X$$

für das kleinste (im Sinne von $\subset$) Y mit folgenden Eigenschaften: $X \subset Y \subset L_{\alpha+k}$, und mit $i<\omega$ und $f \in Y$ ist auch $h_n^{\alpha+k}(i,f) \in Y$ (falls $h_n^{\alpha+k}(i,f)$ definiert ist). $h_n^{\alpha+k} \text{''} X$ ist der <u>Abschluß von X unter $h_n^{\alpha+k}$</u>.

<u>Lemma</u> 4.8 Seien α, k, n wie in 4.6. Sei $\omega \subset X \subset L_{\alpha+k}$. Dann existiert $h_n^{\alpha+k} \text{''} X$.

Beweis: Setze $X_0 = X$, $X_{j+1} = \{ h_n^{\alpha+k}(i,f) : i<\omega,\ f \in X_j,\ h_n^{\alpha+k}(i,f) \text{ definiert} \}$. Dann gilt $\bigcup_{j<\omega} X_j = h_n^{\alpha+k} \text{''} X$. $\dashv$

4.4 liefert nun sofort

<u>Lemma</u> 4.9 Seien α, k, n wie in 4.6, sei $\omega \subset X \subset L_{\alpha+k}$. Dann ist $h_n^{\alpha+k} \text{''} X \prec_{\Sigma_n} L_{\alpha+k}$.

Wir studieren nun die Nicht-Gültigkeit von Σ_n-Komprehension in L_α.

Def. 4.10 Sei $\alpha > \omega$, und sei $n \in \omega \setminus \{0\}$. Dann bezeichnet $\rho_n(L_\alpha)$ (oder auch ρ_n^α) das kleinste $\rho \leq \alpha$ mit folgender Eigenschaft: es existiert ein $A \in \underset{\sim}{\Sigma}_n^{L_\alpha}$ mit $A \cap \rho \notin L_\alpha$.

Bemerkung: Es gilt $\rho_n^\alpha = \alpha$ gdw. L_α Modell von Σ_n-Komprehension ist. ρ_n^α heißt das n^{te} *Projektum* von L_α.

Def. 4.11 Sei $\alpha > \omega$, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Dann bezeichnet $p_n(L_\alpha)$ (oder auch p_n^α) das $<_\alpha$-kleinste $p \in L_\alpha$ mit folgender Eigenschaft: es existiert ein $A \in \Sigma_n^{L_\alpha}(\{p\})$ mit $A \cap \rho_n^\alpha \notin L_\alpha$.
p_n^α heißt der n^{te} *Standardparameter* von L_α.

Lemma 4.12 Für $\alpha > \omega$, $n \in \omega \setminus \{0\}$ sind sowohl ρ_n^α als auch p_n^α wohldefiniert.

Beweis: Es gilt $\alpha \in \Sigma_0^{L_\alpha}$ und $\alpha \notin L_\alpha$; damit ist ρ_n^α wohldefiniert. Es existieren also $x_1, \dots, x_k \in L_\alpha$ und $A \in \Sigma_n^{L_\alpha}(\{x_1, \dots, x_k\})$, so daß $A \cap \rho_n^\alpha \notin L_\alpha$. Setze $p = (\dots((x_1, x_2), x_3) \dots, x_k)$. Es ist leicht nachzurechnen, daß dann auch $A \in \Sigma_n^{L_\alpha}(\{p\})$ gilt, womit p_n^α wohldefiniert ist.

$\dashv$

<u>Satz</u> 4.13 Sei $\alpha > \omega$, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$h_n^\alpha{}''(\rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\}) = L_\alpha .$$

Beweis: Da sicherlich $\omega \leq \rho_n^\alpha$, gilt jedenfalls $h_n^\alpha{}''(\rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\}) \prec_{\Sigma_n} L_\alpha$ wegen 4.9. Sei

$$M \overset{\pi}{\cong} h_n^\alpha{}''(\rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\}),$$

wobei M transitiv ist. Dann gilt $\pi : M \to_{\Sigma_n} L_\alpha$, also $M = L_{\bar\alpha}$ für ein $\bar\alpha \leq \alpha$ wegen 3.13. Damit haben wir

$$\pi : L_{\bar\alpha} \cong h_n^\alpha{}''(\rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\}) \prec_{\Sigma_n} L_\alpha .$$

Beachte, daß $\pi \restriction \rho_n^\alpha = \mathrm{id}$.

Sei nun $A \in \Sigma_n^{L_\alpha}(\{p_n^\alpha\})$ mit $A \cap p_n^\alpha \notin L_\alpha$. Sei etwa $x \in A \Leftrightarrow L_\alpha \models \varphi(x, p_n^\alpha)$, wobei φ Σ_n ist. Dann gilt $\xi \in A \cap p_n^\alpha \Leftrightarrow$
$\xi < p_n^\alpha \wedge L_\alpha \models \varphi(\xi, p_n^\alpha) \Leftrightarrow$
$\xi < p_n^\alpha \wedge L_{\bar\alpha} \models \varphi(\xi, \pi^{-1}(p_n^\alpha))$, so daß
$A \in \Sigma_n^{L_{\bar\alpha}}(\{\pi^{-1}(p_n^\alpha)\})$. Wäre $\bar\alpha < \alpha$, dann hätten wir $A \cap p_n^\alpha \in \mathrm{Def}(L_{\bar\alpha}) = L_{\bar\alpha+1} \subset L_\alpha$, d.h. $A \cap p_n^\alpha \in L_\alpha$; Widerspruch. Damit gilt $\bar\alpha = \alpha$. Damit gilt dann aber auch $\pi^{-1}(p_n^\alpha) = p_n^\alpha$ oder $p_n^\alpha <_\alpha \pi^{-1}(p_n^\alpha)$, da p_n^α das $<_\alpha$-minimale p ist, so daß ein $B \in \Sigma_n^{L_\alpha}(\{p\})$ existiert mit $B \cap p_n^\alpha \notin L_\alpha$.

Angenommen, es wäre $p_n^\alpha <_\alpha \pi^{-1}(p_n^\alpha)$. Aufgrund von 4.2 wäre dann $\pi(p_n^\alpha) <_\alpha p_n^\alpha$. Es gilt aber $\xi \in A \cap p_n^\alpha \Leftrightarrow \xi < p_n^\alpha \wedge L_\alpha \models \varphi(\xi, p_n^\alpha)$
$\Leftrightarrow \xi < p_n^\alpha \wedge L_\alpha \models \varphi(\xi, \pi(p_n^\alpha))$, womit also ein $B \in \Sigma_n^{L_\alpha}(\{\pi(p_n^\alpha)\})$ existierte mit $B \cap p_n^\alpha \notin L_\alpha$ und $\pi(p_n^\alpha) <_\alpha p_n^\alpha$, was wiederum der Definition von p_n^α widerspricht.

Wir haben also

$$\pi : L_\alpha \cong h_n^\alpha{}''(\rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\}) \prec_{\Sigma_n} L_\alpha ,$$

wobei $\pi \restriction (\rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\}) = id$.

Wir definieren nun $X_0 = \rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\}$ und $X_{j+1} = \{ h_n^\alpha(i,f) : i<\omega,\ f \in X_j,\ h_n^\alpha(i,f) \text{ definiert} \}$ für $j \geq 0$. Dann ist $h_n^\alpha{}''(\rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\}) = \bigcup_{j<\omega} X_j$ (vgl. Beweis von 4.8). Wir zeigen nun die

<u>Beh.</u> Für alle $j<\omega$ ist $\pi^{-1} \restriction X_j = id$.

Beweis durch Induktion nach j: Für den Fall $j=0$ wurde dies bereits gezeigt. Sei $\pi^{-1} \restriction X_j = id$. Sei $h_n^\alpha(i,f)$ definiert, wobei $i<\omega$, $f \in X_j$. Setze $g = h_n^\alpha(i,f)$. Sei $\varphi_i^n \equiv \exists v_{i_1} \ldots \exists v_{i_\ell} \psi$, wobei ψ Π_{n-1} ist, (höchstens) die Variablen $v_{i_1}, \ldots, v_{i_\ell}, v_{i_{\ell+1}}, \ldots, v_{i_{\ell^*}}$ frei enthält; sei $x_{i_m} = g(v_{i_m})$ für $1 \leq m \leq \ell$ und $x_{i_m} = f(v_{i_m})$ für $\ell+1 \leq m \leq \ell^*$. Wir müssen zeigen, daß $\pi^{-1}(g) = g$ gilt. Setze $x'_{i_m} = \pi^{-1}(g)(v_{i_m})$ für $1 \leq m \leq \ell$.

Angenommen, es gilt $\pi^{-1}(g) <_\alpha g$. Es gilt

$L_\alpha \models \varphi(x_{i_1},\dots,x_{i_l},x_{i_{l+1}},\dots,x_{i_{l^*}})$, also

auch $L_\alpha \models \varphi(\pi^{-1}(x_{i_1}),\dots,\pi^{-1}(x_{i_l}),x_{i_{l+1}},\dots,x_{i_{l^*}})$,

da $\pi^{-1}(x_{i_m}) = x_{i_m}$ für $l+1 \le m \le l^*$ wegen $\pi^{-1}(f)=f$.

Dies widerspricht aber der Wahl von g als $<_\alpha$-minimal mit $L_\alpha \models \varphi[g^\frown f]$.

Angenommen, es gilt $\pi^{-1}(g) >_\alpha g$. Dann gilt auch $g = \pi(\pi^{-1}(g)) >_\alpha \pi(g)$. Aus $L_\alpha \models \varphi(x_{i_1},\dots,x_{i_l},x_{i_{l+1}},\dots,x_{i_{l^*}})$ folgt $L_\alpha \models \varphi(\pi(x_{i_1}),\dots,\pi(x_{i_l}),x_{i_{l+1}},\dots,x_{i_{l^*}})$. Dies widerspricht wieder der Wahl von g.

$\dashv$ (Beh.)

Wäre nun $h_n^\alpha{}''(\rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\}) \neq L_\alpha$, dann existierte ein $x \in L_\alpha$ mit $\pi(x) \neq x$ (wähle $x \in L_\alpha \setminus h_n^\alpha{}''(\rho_n^\alpha \cup \{p_n^\alpha\})$). Dann wäre aber $\pi^{-1}(\pi(x)) \neq \pi(x)$ im Widerspruch zur Beh.

$\dashv$

<u>Korollar</u> 4.14 Sei $\alpha > \omega$, $n < \omega$. Sei $\pi : L_\alpha \longrightarrow_{\Sigma_n} L_\beta$ für ein β $(\geq \alpha)$. Dann gilt

$$\operatorname{ran}(\pi) \subset h_n^{\beta}{}''(\pi''(p_n^{\alpha} \cup \{p_n^{\alpha}\})),$$

insbesondere also

$$\operatorname{ran}(\pi) \subset h_n^{\beta}{}''(\pi(p_n^{\alpha}) \cup \{\pi(p_n^{\alpha})\}).$$

Beweis: Sei $X_0 = p_n^{\alpha} \cup \{p_n^{\alpha}\}$, und sei $X_{j+1} = \{h_n^{\alpha}(i,f) : i<\omega,\ f \in X_j,\ h_n^{\alpha}(i,f) \text{ definiert}\}$ für $j<\omega$. Wegen 4.13 ist $L_\alpha = \bigcup_{j<\omega} X_j$. Es genügt also, induktiv zu zeigen, daß $\pi'' X_j \subset h_n^{\beta}(\pi''(p_n^{\alpha} \cup \{p_n^{\alpha}\}))$ für alle $j<\omega$. Dies ist trivial für $j=0$. Angenommen, es gilt für j.

Sei $g \in X_{j+1}$, $g = h_n^{\alpha}(i,f)$, wobei $i<\omega$, $f \in X_j$.

Sei φ Π_n, so daß $y = h_n^{\alpha}(i,x)$ gdw. $y, x \in L_\alpha$ und $L_\alpha \models \varphi(i,x,y)$. Dann gilt auch $y = h_n^{\beta}(i,x)$ gdw. $y,x \in L_\beta$ und $L_\beta \models \varphi(i,x,y)$. (Vgl. Beweis von 4.6; es gibt $k<\omega$ und Limeszahlen $\bar\alpha, \bar\beta$ mit $\alpha = \bar\alpha + k$ und $\beta = \bar\beta + k$ wegen Kap. 3.) Damit gilt insbesondere $\pi(g) = h_n^{\beta}(i,\pi(f))$.

Wegen $\pi'' X_j \subset h_n^{\beta}(\pi''(p_n^{\alpha} \cup \{p_n^{\alpha}\}))$ ist also auch $\pi(g) \in h_n^{\beta}(\pi''(p_n^{\alpha} \cup \{p_n^{\alpha}\}))$. $\dashv$

Wir schreiben im folgenden ρ_ω^α für $\min\{\rho_n^\alpha : 1 \le n < \omega\}$. ρ_ω^α ist das <u>ultimative Projektum</u> von L_α.

~~Sei~~ ~~Sei~~

<u>Def.</u> 4.15 Sei $\alpha > \omega$, und sei $1 \le n < \omega$. Wir schreiben $\mathcal{F}_n^\alpha$ für die Menge aller Kompositionen ~~der~~ von im Beweis von 4.6 definierten Σ_n Skolem-Funktionen für L_α; d.h. $\mathcal{F}_n^\alpha$ ist die kleinste Menge $\mathcal{F}$ mit folgenden Eigenschaften:

- jede im Beweis von 4.6 definierte Σ_n Skolem-Funktion ist in $\mathcal{F}$, und
- wenn $g, f_1, \dots, f_\ell \in \mathcal{F}$, dann auch $g(f_1, \dots, f_\ell) \in \mathcal{F}$, wobei $g(f_1, \dots, f_\ell)(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_\ell) = g(f_1(\vec{u}_1), \dots, f_\ell(\vec{u}_\ell))$ (hierbei sei ℓ geeignet).

Falls $n = 0$, dann sei $\mathcal{F}_0^\alpha$ die Menge aller Funktionen aus L_α.

Bemerkung: Offensichtlich gilt $h_n^\alpha{}'' X = \{ f(\vec{x}) : \vec{x} \in X \text{ und } f \in \mathcal{F}_n^\alpha \}$ für $n > 0$.

<u>Lemma</u> 4.16 Sei $\tau \leq \alpha \in OR$. Dann gilt

$\rho_\omega^\alpha < \tau$ gdw.: es gibt $1 \leq n < \omega$, $\beta < \tau$, $p_1, \ldots, p_k \in L_\alpha$ mit $L_\alpha = h_n^\alpha{}''(\beta \cup \{p_1, \ldots, p_k\})$.

Beweis: "$\Rightarrow$" folgt unmittelbar aus Kor. 4.14

"$\Leftarrow$" $h_n^\alpha{}''(\beta \cup \{p_1, \ldots, p_k\}) = \{ f(\vec{x}) : f \in \mathcal{F}_n^\alpha$ und $\vec{x} \in \beta \cup \{p_1, \ldots, p_k\}\}$. Sei $(\sigma_i : i < \omega)$ eine rekursive Aufzählung aller Terme, die $f \in \mathcal{F}_n^\alpha$ denotieren; ~~sei~~ sei σ_i^α die Interpretation von σ_i in L_α. Es gibt ein bijektives $g : \beta \to L_\beta$, $g \in \underset{\sim}{\Sigma}_\omega^{L_\beta}$ (dies folgt z.B. aus 4.14). Falls $g(\xi) = (i, \vec{x})$ für $i < \omega$, $\vec{x} \in \beta$, dann schreiben wir $\tilde{\sigma}^\alpha_{g(\xi)_0}(g(\xi)_1)$ für $\sigma_i^\alpha(\vec{x}, p_1, \ldots, p_k)$.

Wir betrachten nun

$$A = \{\xi < \beta ;\ g(\xi) = (i, \vec{x}) \text{ für } i < \omega,\ \vec{x} \in \beta \text{ und } \xi \notin \tilde{\sigma}^\alpha_{g(\xi)_0}(g(\xi)_1)\}.$$

Es gilt $A \in \underset{\sim}{\Sigma}_{\omega}^{L_\alpha}$.

Angenommen, $A \in L_\alpha$. Dann wäre $A = \tilde{\sigma}^{\alpha}_{g(\xi_0)_0}(g(\xi_0)_1)$ für ein $\xi_0 < \beta$. Dann ist aber $\xi_0 \in A \iff \xi_0 \notin \tilde{\sigma}^{\alpha}_{g(\xi_0)_0}(g(\xi_0)_1) = A$, Widerspruch!

Damit ist $A \notin L_\alpha$. Dies bezeugt, daß $\rho_\omega^\alpha \leq \beta < \tau$. $\dashv$