## Kap. 6 Der Jensensche Überdeckungssatz

Sei $\pi : L_\alpha \to_{\Sigma_\omega} L_{\tilde\alpha}$ gegeben, wobei $\alpha$ und $\tilde\alpha$ Limesordinalzahlen $> \omega$ sind. Setze $X = \operatorname{ran}(\pi)$; $X \prec_{\Sigma_\omega} L_{\tilde\alpha}$. Es sei $\beta(\pi)$ (oder $\beta(X)$) das kleinste $\beta \geq \alpha$, so daß $\rho_\omega^\beta < \alpha$, falls ein solches $\beta$ existiert; andernfalls sei $\beta(\pi) = \infty$. Sei $n(\pi)$ (oder auch $n(X)$) das kleinste $n < \omega$, so daß $\xi < \alpha$ und $p_1, \dots, p_k \in L_\beta$ existieren mit $L_\beta = h_{n+1}^\beta{}''(\xi \cup \{p_1, \dots, p_k\})$; andernfalls sei $n(\pi) = 0$. $(\beta(\pi), n(\pi))$ ist also das "größte" Paar $(\beta, n)$, so daß $\mathrm{ult}_n(L_\beta, \pi)$ Sinn macht.

<u>Definition</u> 6.1 $\pi$ (oder auch $X$) heißt <u>schlecht</u> gdw. $\mathrm{ult}_{n(\pi)}(L_{\beta(\pi)}, \pi)$ nicht fundiert ist; andernfalls heißt $\pi$ <u>gut</u>.

<u>Lemma</u> 6.2. $\pi$ ist schlecht gdw. eine Folge $([a_i, f_i] : i < \omega)$ existiert mit: $[a_i, f_i] \in \mathrm{ult}_{n(\pi)}(L_{\beta(\pi)}, \pi)$ für alle $i < \omega$, und

$[a_{i+1}, f_{i+1}] \;\tilde{\in}\; [a_i, f_i]$ (und daher

$(a_{i+1}, a_i) \in \pi(\{(u,v) : f_{i+1}(u) \in f_i(v)\})$ )

für alle $i < \omega$.

Eine solche Folge ist ein "Zeuge" dafür, daß $\pi$ schlecht ist.

<u>Satz</u> 6.3 Sei $\mu \geq \aleph_1$ eine reguläre Kardinalzahl. Sei $\theta > \mu$ eine Kardinalzahl, und sei $X \subset \theta$ mit $\mathrm{Card}(X) = \mu$. Dann existiert ein ~~gutes~~ $\cancel{\pi : L_\alpha \to_{\Sigma_\omega} L_\theta}$ $\alpha < \theta$ und ein gutes $\pi : L_\alpha \to_{\Sigma_\omega} L_\theta$ mit $\mathrm{Card}(\alpha) = \mathrm{Card}(L_\alpha) = \mu$ und $X \subset \mathrm{ran}(\pi)$.

Beweis: Sei $X = \{x_i : i < \mu\}$. Wir definieren rekursiv Folgen $(Y_i : i \leq \mu)$, $(\bar{V}_i : i \leq \mu)$ und $(\pi_i : i \leq \mu)$, so daß folgendes gilt:

(1) $Y_i \prec_{\Sigma_\omega} V_\theta$, $\mathrm{Card}(Y_i) < \mu$ für $i < \mu$,

(2) $Y_i \subset Y_j$ für $i \leq j \leq \mu$

(3) $Y_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} Y_i$ für Limesordinalzahlen $\lambda \leq \mu$,

(4) $x_i \in Y_{i+1}$ für $i < \mu$,

(5) $\pi_i : \bar{V}_i \cong Y_i \prec_{\Sigma_\omega} V_\theta$, wobei $\bar{V}_i$ transitiv ist, für $i \leq \mu$, und

(6) angenommen, $\pi_i$ ist schlecht; dann existiert eine Folge $([a^i_k, f^i_k] : k<\omega)$ mit $[a^i_k, f^i_k] \in \mathrm{ult}_{n(\pi_i)}(L_{\beta(\pi_i)}, \pi_i)$ und $[a^i_{k+1}, f^i_{k+1}] \tilde{\in} [a^i_k, f^i_k]$ für alle $k<\omega$, so daß $\{a^i_k : k<\omega\} \subset Y_{i+1}$.

Es genügt nun zu zeigen, daß $\pi_\mu$ gut ist. Wir nehmen an, $\pi_\mu$ sei schlecht und führen dies zum Widerspruch.

Setze $\pi = \pi_\mu$, $\bar{V} = \bar{V}_\mu$ und $Y = Y_\mu$. Aufgrund unserer Annahme existiert eine Folge $([a_k, f_k] : k<\omega)$ mit $[a_k, f_k] \in \mathrm{ult}_{n(\pi)}(L_{\beta(\pi)}, \pi)$ und $[a_{k+1}, f_{k+1}] \tilde{\in} [a_k, f_k]$ für alle $k<\omega$.

Wir schreiben $\bar{\pi}_i = \pi^{-1} \circ \pi_i : \bar{V}_i \longrightarrow \bar{V}$, und $\bar{Y}_i = \pi^{-1} {}'' Y_i = \mathrm{ran}(\bar{\pi}_i)$. Es gilt $\bar{Y}_i \prec_{\Sigma_\omega} \bar{V}$, $\bar{Y}_i \subset \bar{Y}_j$ für $i \le j$, $\mathrm{Card}(\bar{Y}_i) < \mu$ für $i<\mu$, $\bar{Y}_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} \bar{Y}_i$ für Limeszahlen $\lambda \le \mu$, und $\bar{Y} = \bigcup_{i<\mu} \bar{Y}_i$.

Sei $\tilde{\theta} > \theta$ ~~…~~ eine Kardinalzahl mit $\beta(\pi) < \tilde{\theta}$.

Es gibt nun ein $Z \prec_{\Sigma_\omega} V_{\tilde{\theta}}$ mit folgenden

Eigenschaften:

(1)' $\quad \mathrm{Card}(Z) < \mu$,

(2)' $\quad \{f_k : k<\omega\} \cup \{\beta(\pi), \bar{Y}\} \subset Z$, und

(3)' $\quad Z \cap \bar{V} = \bar{Y}_{i_0}$ für ein $i_0 < \mu$.

[ Man definiere $Z_\ell$, $\ell<\omega$, rekursiv: sei $Z_0 \prec_{\Sigma_\omega} V_{\tilde{\theta}}$ mit $\{f_k : k<\omega\} \cup \{\beta(\pi), \bar{Y}\} \subset Z$ und $\mathrm{Card}(Z_0) < \mu$; sei $Z_\ell$ definiert, und sei $i(\ell)$ so, daß $Z_\ell \cap \bar{V} \subset \bar{Y}_{i(\ell)}$; dann wähle man $Z_{\ell+1} \prec_{\Sigma_\omega} V_{\tilde{\theta}}$ so, daß $Z_\ell \subset Z_{\ell+1}$, $\mathrm{Card}(Z_{\ell+1}) < \mu$ und $\bar{Y}_{i(\ell)} \subset Z_{\ell+1}$. Dann ist $Z = \bigcup_{\ell<\omega} Z_\ell$ wie gewünscht, denn $Z \cap \bar{V} = \bar{Y}_{\sup_{\ell<\omega} i(\ell)}$. ]

Wir schreiben $\sigma : \tilde{V} \tilde{=} Z \prec_{\Sigma_\omega} V_{\tilde{\theta}}$, wobei $\tilde{V}$ transitiv ist. Wir schreiben auch $\bar{f}_k = \sigma^{-1}(f_k)$ für $k<\omega$. Offensichtlich gilt $\sigma^{-1}(\bar{V}) = \bar{V}_{i_0}$ und $\sigma \restriction \bar{V}_{i_0} = \bar{\pi}_{i_0}$. Weiters gilt aufgrund der Elementarität von $\sigma$, daß $\sigma^{-1}(\beta(\pi)) = \beta(\bar{\pi}_{i_0})$, und $n(\pi) = n(\bar{\pi}_{i_0})$.

Es gilt nun für alle $k<\omega$ $[a_{k+1}, f_{k+1}] \tilde{\in} [a_k, f_k]$, d.h. $(a_{k+1}, a_k) \in \pi(\{(u,v) : f_{k+1}(u) \in f_k(v)\})$

$$= \pi(\{(u,v) : \sigma(\bar{f}_{k+1})(u) \in \sigma(\bar{f}_k)(v)\})$$

$$= \pi \circ \sigma(\{(u,v) : \bar{f}_{k+1}(u) \in \bar{f}_k(v)\})$$

$$= \pi \circ \bar{\pi}_{i_0}(\{(u,v) : \bar{f}_{k+1}(u) \in \bar{f}_k(v)\}),$$

da $\sigma \upharpoonright \bar{V}_{i_0} = \bar{\pi}_{i_0}$,

$$= \pi_{i_0}(\{(u,v) : \bar{f}_{k+1}(u) \in \bar{f}_k(v)\}).$$

Es gilt $\cancel{\bar{f}_{k+1}, f_k}$ $[a_{k+1}, \bar{f}_{k+1}], [a_k, \bar{f}_k] \in$ $ult_{n(\bar{\pi}_{i_0})}(L_{\beta(\bar{\pi}_{i_0})}, \pi_{i_0}) = ult_{n(\pi_{i_0})}(L_{\beta(\pi_{i_0})}, \pi_{i_0})$ ; mithin ist also $ult_{n(\pi_{i_0})}(L_{\beta(\pi_{i_0})}, \pi_{i_0})$ nicht fundiert. Wegen (b) gibt es also eine Folge $([a_k^{i_0}, f_k^{i_0}] : k < \omega)$ mit $[a_k^{i_0}, f_k^{i_0}] \in$ $ult_{n(\pi_{i_0})}(L_{\beta(\pi_{i_0})}, \pi_{i_0})$ und $[a_{k+1}^{i_0}, f_{k+1}^{i_0}] \tilde{\in}$ $[a_k^{i_0}, f_k^{i_0}]$ für alle $k < \omega$.

Weiters gilt $\{a_k^{i_0} : k < \omega\} \subset Y_{i+1} \subset Y$.

Es gilt nun ~~...~~ für alle $k<\omega$ :

$$(a^{i_0}_{k+1}, a^{i_0}_k) \in \pi_{i_0}(\{(u,v): f^{i_0}_{k+1}(u) \in f^{i_0}_k(v)\})$$

$$= \pi \circ \overline{\pi}_{i_0}(\{(u,v): f^{i_0}_{k+1}(u) \in f^{i_0}_k(v)\})$$

$$= \pi \circ \sigma(\{(u,v): f^{i_0}_{k+1}(u) \in f^{i_0}_k(v)\})$$

$$= \pi(\{(u,v): \sigma(f^{i_0}_{k+1})(u) \in \sigma(f^{i_0}_k)(v)\}) \;;$$

da aber $a^{i_0}_{k+1}, a^{i_0}_k \in Y$, d.h. $\in \operatorname{ran}(\pi)$, gilt damit

$$(\pi^{-1}(a^{i_0}_{k+1}), \pi^{-1}(a^{i_0}_k)) \in$$

$$\{(u,v) : \sigma(f^{i_0}_{k+1})(u) \in \sigma(f^{i_0}_k)(v)\}, \text{ d.h.}$$

$$\sigma(f^{i_0}_{k+1})(\pi^{-1}(a^{i_0}_{k+1})) \in \sigma(f^{i_0}_k)(\pi^{-1}(a^{i_0}_k))$$

für alle $k<\omega$. Widerspruch !

$\dashv$

Man zeigt ~~a~~ mit diesen Methoden auch:

<u>Satz</u> 6.4 Sei $\mu \geq \aleph_1$ eine reguläre Kardinalzahl. Sei $\tilde{\alpha}$ eine Limesordinalzahl, und sei $X \subset \tilde{\alpha}$ mit $\operatorname{Card}(X) = \mu$. Dann existiert ein $\alpha \leq \tilde{\alpha}$ und ein gutes $\pi : L_\alpha \xrightarrow[\Sigma_\omega]{} L_{\tilde{\alpha}}$ mit $\operatorname{Card}(\alpha) = \operatorname{Card}(X) = \mu$ und $X \subset \operatorname{ran}(\pi)$.

—

<u>Def.</u> 6.5 Mit $L^\#$ bezeichnen wir die Aussage, daß ein nichttriviales $\pi: L \longrightarrow_{\Sigma_\omega} L$ existiert (d.h. ein solches $\pi$ mit $\pi \neq id$).

<u>Satz</u> 6.6. (Jensen) Angenommen, $L^\#$ ist falsch. Sei $X$ eine Menge von Ordinalzahlen. Dann existiert ein $Y \in L$ mit $Y \supset X$ und

$$Card(Y) \leq Card(X) + \aleph_1 .$$

Beweis: Wir zeigen durch Induktion nach $\kappa$:

(*) Sei $X$ eine Menge von Ordinalzahlen mit $Card(X) = \kappa \geq \aleph_1$. Dann existiert ein $Y \in L$ mit $Y \supset X$ und $Card(Y) = Card(X)$.

<u>Fall</u> 1: $\kappa$ ist regulär, $\kappa \geq \aleph_1$.
Sei $X$ eine Menge von Ordinalzahlen mit $Card(X) = \kappa$. Wir setzen induktiverweise voraus, daß (*) für alle Mengen von Ordinalzahlen mit kleinerem Supremum als $sup(X)$ ~~[illegible]~~ gilt. Sei o.B.d.A. $sup(X) = \tilde{\alpha}$ eine Limesordinalzahl. Wir dürfen ebenfalls o.B.d.A. annehmen, daß $Card(X) < Card(\tilde{\alpha})$, da wir ansonsten einfach $Y = \tilde{\alpha}$ wählen können. Sei $\pi: L_\alpha \longrightarrow_{\Sigma_\omega} L_{\tilde{\alpha}}$ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ gut mit

~~[illegible]~~

$\mathrm{Card}(\alpha) = \kappa$ und $X \subset \mathrm{ran}(\pi)$. Ein solches $\pi$ existiert wegen 6.~~6~~.4. Da $X$ kofinal in $\tilde{\alpha}$ ist und $\mathrm{Card}(\alpha) = \kappa = \mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\tilde{\alpha})$, kann $\pi$ nicht die Identität sein.

Setze $\beta = \beta(\pi)$, $n = n(\pi)$. Sei

$$\tilde{\pi} : L_\beta \to_{\Sigma_{n+1}} \mathrm{ult}_n(L_\beta, \pi) \cong L_{\tilde{\beta}}$$

die im vorigen Kapitel konstruierte Abbildung. Aufgrund unserer Hypothese, daß $L^\#$ falsch ist, gilt $\beta \in OR$ (und nicht $\beta = \infty$). ~~[illegible]~~ Damit gilt aber auch $\rho^\beta_{n+1} < \alpha \leq \rho^\beta_n$.

~~Die~~ Nun gilt wegen des Korollars auf p. 54

$$X \subset \mathrm{ran}(\pi) \subset h^{\tilde{\beta}}_{n+1}{}''(\pi'' \rho^\beta_{n+1} \cup \{\pi(p^\beta_{n+1})\}).$$

~~Es gilt~~ Da $\sup(\pi'' \rho^\beta_{n+1}) \leq \pi(\rho^\beta_{n+1}) < \tilde{\alpha}$, existiert nach Induktionsvoraussetzung ein $Z \in L$ mit $\mathrm{Card}(Z) \leq \mathrm{Card}(\pi'' \rho^\beta_{n+1}) = \mathrm{Card}(\rho^\beta_{n+1}) \leq \mathrm{Card}(\alpha) = \kappa$ und $Z \supset \pi'' \rho^\beta_{n+1}$. Dann ist aber

$$Y = h^{\tilde{\beta}}_{n+1}{}''(Z \cup \{\pi(p^\beta_{n+1})\}) \in L$$

wie gewünscht. ⊣

Fall 2 : $\kappa$ ist singulär.

Sei $X = \{x_i : i < \kappa\}$, und sei $e : cf(\kappa) \to \kappa$ kofinal. Für jedes $i < cf(\kappa)$ ist $\{x_j : j < e(i)\}$ von kleinerer Mächtigkeit als $\kappa$, so daß ~~ein~~ nach Induktionsvoraussetzung ein $X_i \in L$ existiert mit $X_i \supset \{x_j : j < e(i)\}$ und $Card(X_i) < \kappa$. Sei $\{X_i : i < cf(\kappa)\} \subset L_\alpha$, und sei $f : \alpha \to L_\alpha$ bijektiv ~~surjektiv~~ mit $f \in L$. Sei $Z = \{k \in \alpha : f(k) = X_i \text{ für ein } i\}$. Da $Card(Z) = cf(\kappa) < \kappa$ existiert nach Induktionsvoraussetzung ein $Z' \in L$ mit $Z' \supset Z$ und $Card(Z') \leq cf(\kappa) + \aleph_1$. Sei nun

$$Y = \bigcup_{k \in Z'} \{f(k) : f(k) \subset OR,\ Card(f(k)) < \kappa\}.$$

Dann ist $Y \in L$ und $Card(Y) \leq cf(\kappa) + \aleph_1 + \kappa$.

Es gilt aber für $i < cf(\kappa)$ ~~für~~ $\{x_j : j < e(i)\} \subset X_i = f(k)$ für ein $k \in Z'$, und damit $X \subset Y$ wie gewünscht.

$\dashv$

<u>Korollar</u> 6.7 Angenommen, $L^{\#}$ ist falsch.
Dann gilt die Singuläre Kardinalzahlhypothese,
d.h.

$$\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^{+} \cdot 2^{cf(\kappa)}$$

für alle (singulären) Kardinalzahlen $\kappa$.

Beweis: Sei $X \subset \kappa$, $Card(X) = cf(\kappa)$. Dann existiert ein $Y \in L$ mit $Card(Y) \leq cf(\kappa) \cdot \aleph_1$ und $Y \supset X$. Zu jedem $Y \subset \kappa$ mit $Card(Y) \leq cf(\kappa) \cdot \aleph_1$ existieren $\leq$

$$2^{cf(\kappa)} \cdot \aleph_1^{cf(\kappa)} = 2^{cf(\kappa)}$$

viele Teilmengen der Mächtigkeit $cf(\kappa)$. In $L$ existieren $\leq \kappa^{+}$ viele $Y \subset \kappa$ mit $Card(Y) \leq Card(X) \cdot \aleph_1$ (aufgrund von 2.21).
Damit gibt es höchstens

$$\kappa^{+} \cdot 2^{cf(\kappa)}$$

viele Elemente in $[\kappa]^{cf(\kappa)}$.

$\dashv$

<u>Lemma</u> 6.8 Angenommen, $L^{\#}$ gilt. Dann gilt auch $L \models$ "es existiert eine unerreichbare Kardinalzahl"

<u>Kor.</u> 6.9 Wenn die Singuläre Kardinalzahlhypothese falsch ist, dann ist ZFC konsistent.

Wir können also in ZFC nicht $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\neg \mathrm{SCH})$ beweisen.

Beweis von 6.8: Sei $\pi : L \to L$, $\pi \neq \mathrm{id}$. Sei $\kappa$ minimal mit $\pi(\kappa) \neq \kappa$ (d.h. $\pi(\kappa) > \kappa$). $\kappa > \omega$. $\kappa$ ist regulär in $L$: andernfalls sei $f \in L$, $f : \alpha \to \kappa$ kofinal, wobei $\alpha < \kappa$; dann ist $\pi(f) : \alpha \to \pi(\kappa)$ kofinal, ↯ Widerspruch! $\kappa$ ist Limeskardinalzahl in $L$: andernfalls sei $\kappa = \lambda^{+L}$; dann gilt $\pi(\kappa) = \lambda^{+L}$, Widerspruch!

$\dashv$