Braucht die Mathematik neue Axiome?

Ralf Schindler

Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster, Germany

Betrachten wir die folgenden arithmetischen Aussagen:

$7 + 5 = 12$.
Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $7 + n = 12$.
$\exists n\ 7 + n = 12$.
$\exists n\ n^2 + n = 132$.
$\exists n \exists m\ n \cdot 17 + m = 200$.

Alle diese Aussagen sind von der Gestalt "Es gibt ..., so daß ...."
Derartige Aussagen heißen Σ_1.

Betrachten wir die folgenden arithmetischen Aussagen:

$7 + 5 = 12$.
Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $7 + n = 12$.
$\exists n \; 7 + n = 12$.
$\exists n \; n^2 + n = 132$.
$\exists n \exists m \; n \cdot 17 + m = 200$.

Alle diese Aussagen sind von der Gestalt "Es gibt ..., so daß ...."
Derartige Aussagen heißen Σ_1.

Betrachten wir die folgenden arithmetischen Aussagen:

$7 + 5 = 12$.
Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $7 + n = 12$.
$\exists n\ 7 + n = 12$.
$\exists n\ n^2 + n = 132$.
$\exists n \exists m\ n \cdot 17 + m = 200$.

Alle diese Aussagen sind von der Gestalt "Es gibt ..., so daß ...."
Derartige Aussagen heißen Σ_1.

Betrachten wir die folgenden arithmetischen Aussagen:

$7 + 5 = 12$.
Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $7 + n = 12$.
$\exists n \; 7 + n = 12$.
$\exists n \; n^2 + n = 132$.
$\exists n \exists m \; n \cdot 17 + m = 200$.

Alle diese Aussagen sind von der Gestalt "Es gibt ..., so daß ...."
Derartige Aussagen heißen Σ_1.

Betrachten wir die folgenden arithmetischen Aussagen:

$7 + 5 = 12$.
Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $7 + n = 12$.
$\exists n\ 7 + n = 12$.
$\exists n\ n^2 + n = 132$.
$\exists n \exists m\ n \cdot 17 + m = 200$.

Alle diese Aussagen sind von der Gestalt "Es gibt ..., so daß ...."
Derartige Aussagen heißen Σ_1.

Betrachten wir die folgenden arithmetischen Aussagen:

$7 + 5 = 12$.
Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $7 + n = 12$.
$\exists n\ 7 + n = 12$.
$\exists n\ n^2 + n = 132$.
$\exists n \exists m\ n \cdot 17 + m = 200$.

Alle diese Aussagen sind von der Gestalt "Es gibt ..., so daß ...."
Derartige Aussagen heißen Σ_1.

Betrachten wir die folgenden arithmetischen Aussagen:

$7 + 5 = 12$.
Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $7 + n = 12$.
$\exists n\ 7 + n = 12$.
$\exists n\ n^2 + n = 132$.
$\exists n \exists m\ n \cdot 17 + m = 200$.

Alle diese Aussagen sind von der Gestalt "Es gibt ..., so daß ...."
Derartige Aussagen heißen Σ_1.

Betrachten wir die folgenden arithmetischen Aussagen:

$7 + 5 = 12$.
Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $7 + n = 12$.
$\exists n\ 7 + n = 12$.
$\exists n\ n^2 + n = 132$.
$\exists n \exists m\ n \cdot 17 + m = 200$.

Alle diese Aussagen sind von der Gestalt "Es gibt ..., so daß ...."
Derartige Aussagen heißen Σ_1.

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$
$\forall n \; n + 1 \neq 0.$
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$
$\forall n \; n + 0 = n.$
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1.$
$\forall n \; n \cdot 0 = 0.$
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$
$\forall n \; n^0 = 1.$
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$
$\forall n \; \neg \; n < 0.$
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$

$\forall n \ n + 1 \neq 0.$

$\forall n \forall m \ (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$

$\forall n \ n + 0 = n.$

$\forall n \forall m \ n + (m + 1) = (n + m) + 1.$

$\forall n \ n \cdot 0 = 0.$

$\forall n \forall m \ n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$

$\forall n \ n^0 = 1.$

$\forall n \forall m \ n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$

$\forall n \forall m \ (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$

$\forall n \neg \ n < 0.$

$\forall n \forall m \ (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$
$\forall n \; n + 1 \neq 0.$
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$
$\forall n \; n + 0 = n.$
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1.$
$\forall n \; n \cdot 0 = 0.$
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$
$\forall n \; n^0 = 1.$
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$
$\forall n \; \neg \; n < 0.$
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1$.
$\forall n \; n + 1 \neq 0$.
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m)$.
$\forall n \; n + 0 = n$.
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1$.
$\forall n \; n \cdot 0 = 0$.
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n$.
$\forall n \; n^0 = 1$.
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n$.
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m)$.
$\forall n \; \neg \; n < 0$.
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n)$.

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1$.
$\forall n\ n + 1 \neq 0$.
$\forall n \forall m\ (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m)$.
$\forall n\ n + 0 = n$.
$\forall n \forall m\ n + (m + 1) = (n + m) + 1$.
$\forall n\ n \cdot 0 = 0$.
$\forall n \forall m\ n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n$.
$\forall n\ n^0 = 1$.
$\forall n \forall m\ n^{m+1} = (n^m) \cdot n$.
$\forall n \forall m\ (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m)$.
$\forall n\ \neg\ n < 0$.
$\forall n \forall m\ (n < m \vee n = m \vee m < n)$.

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$
$\forall n \; n + 1 \neq 0.$
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$
$\forall n \; n + 0 = n.$
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1.$
$\forall n \; n \cdot 0 = 0.$
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$
$\forall n \; n^0 = 1.$
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$
$\forall n \; \neg \; n < 0.$
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$
$\forall n \; n + 1 \neq 0.$
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$
$\forall n \; n + 0 = n.$
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1.$
$\forall n \; n \cdot 0 = 0.$
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$
$\forall n \; n^0 = 1.$
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$
$\forall n \; \neg \; n < 0.$
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$
$\forall n \; n + 1 \neq 0.$
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$
$\forall n \; n + 0 = n.$
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1.$
$\forall n \; n \cdot 0 = 0.$
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$
$\forall n \; n^0 = 1.$
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$
$\forall n \; \neg \; n < 0.$
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$
$\forall n \; n + 1 \neq 0.$
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$
$\forall n \; n + 0 = n.$
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1.$
$\forall n \; n \cdot 0 = 0.$
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$
$\forall n \; n^0 = 1.$
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$
$\forall n \; \neg \; n < 0.$
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$
$\forall n \; n + 1 \neq 0.$
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$
$\forall n \; n + 0 = n.$
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1.$
$\forall n \; n \cdot 0 = 0.$
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$
$\forall n \; n^0 = 1.$
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$
$\forall n \; \neg \; n < 0.$
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1$.
$\forall n \; n + 1 \neq 0$.
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m)$.
$\forall n \; n + 0 = n$.
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1$.
$\forall n \; n \cdot 0 = 0$.
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n$.
$\forall n \; n^0 = 1$.
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n$.
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m)$.
$\forall n \; \neg \; n < 0$.
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n)$.

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$
$\forall n \; n + 1 \neq 0.$
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$
$\forall n \; n + 0 = n.$
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1.$
$\forall n \; n \cdot 0 = 0.$
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$
$\forall n \; n^0 = 1.$
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$
$\forall n \; \neg \; n < 0.$
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Es gibt ein Axiomensystem, in dem alle wahren arithmetischen Aussagen, welche Σ_1 sind, bewiesen werden können:

$0 + 1 = 1.$
$\forall n \; n + 1 \neq 0.$
$\forall n \forall m \; (n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m).$
$\forall n \; n + 0 = n.$
$\forall n \forall m \; n + (m + 1) = (n + m) + 1.$
$\forall n \; n \cdot 0 = 0.$
$\forall n \forall m \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$
$\forall n \; n^0 = 1.$
$\forall n \forall m \; n^{m+1} = (n^m) \cdot n.$
$\forall n \forall m \; (n < m + 1 \Longleftrightarrow n < m \vee n = m).$
$\forall n \; \neg \; n < 0.$
$\forall n \forall m \; (n < m \vee n = m \vee m < n).$

Komplizierter sind Aussagen der Gestalt "Für alle ... gilt ...." Diese heißen Π_1.

Beispiele:
$\forall n \forall m \forall q \forall s > 2\ [n^s + m^s = q^s \Longrightarrow (n = 0 \vee m = 0)]$.
$\forall n\ \exists p\ (n < p < 2 \cdot n \wedge p$ ist Primzahl $)$.

Oder gar Π_2–Aussagen, etwa, daß es unendlich viele Primzhlzwillinge gibt:
$\forall n \exists p > n\ (p$ und $p + 2$ sind Primzahlen $)$.

Komplizierter sind Aussagen der Gestalt “Für alle ... gilt ....” Diese heißen Π_1.

Beispiele:
$\forall n \forall m \forall q \forall s > 2\ [n^s + m^s = q^s \Longrightarrow (n = 0 \vee m = 0)]$.
$\forall n\ \exists p\ (n < p < 2 \cdot n \wedge p$ ist Primzahl).

Oder gar Π_2–Aussagen, etwa, daß es unendlich viele Primzhlzwillinge gibt:
$\forall n \exists p > n\ (p$ und $p + 2$ sind Primzahlen).

Komplizierter sind Aussagen der Gestalt “Für alle ... gilt ....” Diese heißen Π_1.

Beispiele:
$\forall n \forall m \forall q \forall s > 2\ [n^s + m^s = q^s \Longrightarrow (n = 0 \vee m = 0)]$.
$\forall n\ \exists p\ (n < p < 2 \cdot n \wedge p$ ist Primzahl $)$.

Oder gar Π_2–Aussagen, etwa, daß es unendlich viele Primzhlzwillinge gibt:
$\forall n \exists p > n\ (p$ und $p + 2$ sind Primzahlen $)$.

Komplizierter sind Aussagen der Gestalt “Für alle ... gilt ....” Diese heißen Π_1.

Beispiele:
$\forall n \forall m \forall q \forall s > 2 \; [n^s + m^s = q^s \Longrightarrow (n = 0 \vee m = 0)]$.
$\forall n \; \exists p \; (n < p < 2 \cdot n \wedge p$ ist Primzahl $)$.

Oder gar Π_2–Aussagen, etwa, daß es unendlich viele Primzhlzwillinge gibt:
$\forall n \exists p > n \; (p$ und $p + 2$ sind Primzahlen $)$.

Komplizierter sind Aussagen der Gestalt “Für alle ... gilt ....” Diese heißen Π_1.

Beispiele:
$\forall n \forall m \forall q \forall s > 2 \; [n^s + m^s = q^s \Longrightarrow (n = 0 \vee m = 0)]$.
$\forall n \; \exists p \; (n < p < 2 \cdot n \wedge p$ ist Primzahl $)$.

Oder gar Π_2–Aussagen, etwa, daß es unendlich viele Primzhlzwillinge gibt:
$\forall n \exists p > n \; (p$ und $p + 2$ sind Primzahlen $)$.

Komplizierter sind Aussagen der Gestalt “Für alle ... gilt ....” Diese heißen Π_1.

Beispiele:
$\forall n \forall m \forall q \forall s > 2\ [n^s + m^s = q^s \Longrightarrow (n = 0 \vee m = 0)]$.
$\forall n\ \exists p\ (n < p < 2 \cdot n \wedge p$ ist Primzahl $)$.

Oder gar Π_2–Aussagen, etwa, daß es unendlich viele Primzhlzwillinge gibt:
$\forall n \exists p > n\ (p$ und $p + 2$ sind Primzahlen $)$.

Komplizierter sind Aussagen der Gestalt “Für alle ... gilt ....” Diese heißen Π_1.

Beispiele:
$\forall n \forall m \forall q \forall s > 2 \; [n^s + m^s = q^s \Longrightarrow (n = 0 \vee m = 0)]$.
$\forall n \; \exists p \; (n < p < 2 \cdot n \wedge p$ ist Primzahl).

Oder gar Π_2–Aussagen, etwa, daß es unendlich viele Primzhlzwillinge gibt:
$\forall n \exists p > n \; (p$ und $p + 2$ sind Primzahlen).

Satz (K. Gödel). Sei T ein rekursiv aufzählbares zahlentheoretisches Axiomensystem. Dann ist T entweder inkonsistent oder es gibt eine (wahre) Π_1-Aussage, die in T nicht entschieden werden kann.

Ein Standardbeispiel für ein derartiges Axiomensystem T ist die Peano–Arithmetik. Diese entsteht aus obigem Σ_1–vollständigen System durch Hinzunahme des Schemas der transfiniten Induktion:

$$[\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \Longrightarrow \varphi(n+1))] \Longrightarrow \forall n\ \varphi(n).$$

Satz (K. Gödel). Sei T ein rekursiv aufzählbares zahlentheoretisches Axiomensystem. Dann ist T entweder inkonsistent oder es gibt eine (wahre) Π_1-Aussage, die in T nicht entschieden werden kann.

Ein Standardbeispiel für ein derartiges Axiomensystem T ist die Peano–Arithmetik. Diese entsteht aus obigem Σ_1–vollständigen System durch Hinzunahme des Schemas der transfiniten Induktion:

$$[\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \Longrightarrow \varphi(n+1))] \Longrightarrow \forall n\ \varphi(n).$$

Satz (K. Gödel). Sei T ein rekursiv aufzählbares zahlentheoretisches Axiomensystem. Dann ist T entweder inkonsistent oder es gibt eine (wahre) Π_1-Aussage, die in T nicht entschieden werden kann.

Ein Standardbeispiel für ein derartiges Axiomensystem T ist die Peano–Arithmetik. Diese entsteht aus obigem Σ_1–vollständigen System durch Hinzunahme des Schemas der transfiniten Induktion:

$$[\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \Longrightarrow \varphi(n+1))] \Longrightarrow \forall n\ \varphi(n).$$

Satz (K. Gödel). Sei T ein rekursiv aufzählbares zahlentheoretisches Axiomensystem. Dann ist T entweder inkonsistent oder es gibt eine (wahre) Π_1-Aussage, die in T nicht entschieden werden kann.

Ein Standardbeispiel für ein derartiges Axiomensystem T ist die Peano–Arithmetik. Diese entsteht aus obigem Σ_1–vollständigen System durch Hinzunahme des Schemas der transfiniten Induktion:

$$[\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \Longrightarrow \varphi(n+1))] \Longrightarrow \forall n\ \varphi(n).$$

Satz (K. Gödel). Sei T ein rekursiv aufzählbares zahlentheoretisches Axiomensystem. Dann ist T entweder inkonsistent oder es gibt eine (wahre) Π_1-Aussage, die in T nicht entschieden werden kann.

Ein Standardbeispiel für ein derartiges Axiomensystem T ist die Peano–Arithmetik. Diese entsteht aus obigem Σ_1–vollständigen System durch Hinzunahme des Schemas der transfiniten Induktion:

$$[\varphi(0) \wedge \forall n \; (\varphi(n) \Longrightarrow \varphi(n+1))] \Longrightarrow \forall n \; \varphi(n).$$

Die obige Aussage, wonach es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, wurde bislang noch nicht (in der Peano–Arithmetik) entschieden.

Allerdings wurden bislang noch keine “natürlichen” zahlentheoretischen Aussagen gefunden, welche beweisbar in der Peano–Arithmetik nicht entscheidbar sind. Die Peano–Arithmetik scheint *alle* natürlichen Fragen bzgl. der Struktur

$$(\mathbb{N}, +, \cdot)$$

zu entscheiden. (Nunja, Paris–Harrington, Kruskal, . . .)

Anders sieht es in der Mengenlehre und nahestehenden Gebieten der Mathematik aus.

Die obige Aussage, wonach es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, wurde bislang noch nicht (in der Peano–Arithmetik) entschieden. Allerdings wurden bislang noch keine "natürlichen" zahlentheoretischen Aussagen gefunden, welche beweisbar in der Peano–Arithmetik nicht entscheidbar sind. Die Peano–Arithmetik scheint *alle* natürlichen Fragen bzgl. der Struktur

$$(\mathbb{N}, +, \cdot)$$

zu entscheiden. (Nunja, Paris–Harrington, Kruskal, ...)

Anders sieht es in der Mengenlehre und nahestehenden Gebieten der Mathematik aus.

Die obige Aussage, wonach es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, wurde bislang noch nicht (in der Peano–Arithmetik) entschieden. Allerdings wurden bislang noch keine "natürlichen" zahlentheoretischen Aussagen gefunden, welche beweisbar in der Peano–Arithmetik nicht entscheidbar sind. Die Peano–Arithmetik scheint *alle* natürlichen Fragen bzgl. der Struktur

$$(\mathbb{N}, +, \cdot)$$

zu entscheiden. (Nunja, Paris–Harrington, Kruskal, . . .)

Anders sieht es in der Mengenlehre und nahestehenden Gebieten der Mathematik aus.

Die obige Aussage, wonach es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, wurde bislang noch nicht (in der Peano–Arithmetik) entschieden. Allerdings wurden bislang noch keine "natürlichen" zahlentheoretischen Aussagen gefunden, welche beweisbar in der Peano–Arithmetik nicht entscheidbar sind. Die Peano–Arithmetik scheint *alle* natürlichen Fragen bzgl. der Struktur

$$(\mathbb{N}, +, \cdot)$$

zu entscheiden. (Nunja, Paris–Harrington, Kruskal, ...)

Anders sieht es in der Mengenlehre und nahestehenden Gebieten der Mathematik aus.

Die obige Aussage, wonach es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, wurde bislang noch nicht (in der Peano–Arithmetik) entschieden. Allerdings wurden bislang noch keine "natürlichen" zahlentheoretischen Aussagen gefunden, welche beweisbar in der Peano–Arithmetik nicht entscheidbar sind. Die Peano–Arithmetik scheint *alle* natürlichen Fragen bzgl. der Struktur

$$(\mathbb{N}, +, \cdot)$$

zu entscheiden. (Nunja, Paris–Harrington, Kruskal, ...)

Anders sieht es in der Mengenlehre und nahestehenden Gebieten der Mathematik aus.

Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen; aber *wieviele* gibt es?

Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{R}$.

Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.

Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen; aber *wieviele* gibt es?

Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{R}$.

Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.

Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen; aber *wieviele* gibt es?

Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{R}$.

Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.

Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Young (1906): Jede überabzählbare G_δ- oder F_σ-Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Aleksandrov/Hausdorff (1916): Jede überabzählbare Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Suslin (ca. 1917): Jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ vielen Borelmengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen $A \subset \mathbb{R}$.

Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Young (1906): Jede überabzählbare G_δ- oder F_σ-Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Aleksandrov/Hausdorff (1916): Jede überabzählbare Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Suslin (ca. 1917): Jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ vielen Borelmengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen $A \subset \mathbb{R}$.

Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Young (1906): Jede überabzählbare G_δ- oder F_σ-Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Aleksandrov/Hausdorff (1916): Jede überabzählbare Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Suslin (ca. 1917): Jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ vielen Borelmengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen $A \subset \mathbb{R}$.

Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Young (1906): Jede überabzählbare G_δ- oder F_σ-Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Aleksandrov/Hausdorff (1916): Jede überabzählbare Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Suslin (ca. 1917): Jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ vielen Borelmengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen $A \subset \mathbb{R}$.

Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
Young (1906): Jede überabzählbare G_δ- oder F_σ-Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
Aleksandrov/Hausdorff (1916): Jede überabzählbare Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
Suslin (ca. 1917): Jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.
Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ vielen Borelmengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen $A \subset \mathbb{R}$.

Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?

Zermelo/Fraenkel/Skolem (ab 1904):
Standard-Axiomensystem der Mengenlehre, ZFC.
Kann in ZFC entschieden werden, ob jede überabzählbare projektive Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt?

Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt in L die Kontinuumshypothese.

Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?
Zermelo/Fraenkel/Skolem (ab 1904):
Standard-Axiomensystem der Mengenlehre, ZFC.
Kann in ZFC entschieden werden, ob jede überabzählbare projektive Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt?

Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt in L die Kontinuumshypothese.

Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?
Zermelo/Fraenkel/Skolem (ab 1904):
Standard-Axiomensystem der Mengenlehre, ZFC.
Kann in ZFC entschieden werden, ob jede überabzählbare projektive Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt?

Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt in L die Kontinuumshypothese.

Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?
Zermelo/Fraenkel/Skolem (ab 1904):
Standard-Axiomensystem der Mengenlehre, ZFC.
Kann in ZFC entschieden werden, ob jede überabzählbare projektive Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt?

Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt in L die Kontinuumshypothese.

Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?
Zermelo/Fraenkel/Skolem (ab 1904):
Standard-Axiomensystem der Mengenlehre, ZFC.
Kann in ZFC entschieden werden, ob jede überabzählbare projektive Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt?

Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt in L die Kontinuumshypothese.

Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Wie steht es mit der Konsistenz von "ZFC+ jedes projektive $A \subset \mathbb{R}$ hat eine perfekte Teilmenge"?

Specker (1957): Wenn jedes überabzählbare koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ eine perfekte Teilmenge besitzt, dann ist $\aleph_1$ eine unerreichbare Kardinalzahl in L.

Solovay (1970): Wenn ZFC+ "es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl" konsistent ist, dann gibt es ein Modell von ZFC, in dem jede überabzählbare Menge reeller Zahlen, die $\mathrm{OD}_{\mathbb{R}}$ ist, eine perfekte Teilmenge besitzt.

Wie steht es mit der Konsistenz von "ZFC+ jedes projektive $A \subset \mathbb{R}$ hat eine perfekte Teilmenge"?

Specker (1957): Wenn jedes überabzählbare koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ eine perfekte Teilmenge besitzt, dann ist $\aleph_1$ eine unerreichbare Kardinalzahl in L.

Solovay (1970): Wenn ZFC+ "es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl" konsistent ist, dann gibt es ein Modell von ZFC, in dem jede überabzählbare Menge reeller Zahlen, die $\mathrm{OD}_{\mathbb{R}}$ ist, eine perfekte Teilmenge besitzt.

Wie steht es mit der Konsistenz von “ZFC$+$ jedes projektive $A \subset \mathbb{R}$ hat eine perfekte Teilmenge”?

Specker (1957): Wenn jedes überabzählbare koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ eine perfekte Teilmenge besitzt, dann ist $\aleph_1$ eine unerreichbare Kardinalzahl in L.

Solovay (1970): Wenn ZFC$+$ “es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl” konsistent ist, dann gibt es ein Modell von ZFC, in dem jede überabzählbare Menge reeller Zahlen, die $\mathrm{OD}_{\mathbb{R}}$ ist, eine perfekte Teilmenge besitzt.

Gibt es vernünftige Axiome, die entscheiden, *welche* Klassen Γ definierbarer Mengen reeller Zahlen so sind, daß jedes überabzählbare $A \in \Gamma$ eine perfekte Teilmenge besitzt?

Derartige Axiome existieren: **Große-Kardinalzahl-Axiome** und **Determiniertheitsannahmen**. Diese sind wirklich zwei Seiten ein und derselben Medaille.

Diese Axiome entscheiden sogar *alle* natürlichen Fragen bzgl. der Struktur

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in).$$

Gibt es vernünftige Axiome, die entscheiden, *welche* Klassen Γ definierbarer Mengen reeller Zahlen so sind, daß jedes überabzählbare $A \in \Gamma$ eine perfekte Teilmenge besitzt?

Derartige Axiome existieren: **Große-Kardinalzahl-Axiome** und **Determiniertheitsannahmen**. Diese sind wirklich zwei Seiten ein und derselben Medaille.

Diese Axiome entscheiden sogar *alle* natürlichen Fragen bzgl. der Struktur

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in).$$

Gibt es vernünftige Axiome, die entscheiden, *welche* Klassen Γ definierbarer Mengen reeller Zahlen so sind, daß jedes überabzählbare $A \in \Gamma$ eine perfekte Teilmenge besitzt?

Derartige Axiome existieren: **Große-Kardinalzahl-Axiome** und **Determiniertheitsannahmen**. Diese sind wirklich zwei Seiten ein und derselben Medaille.

Diese Axiome entscheiden sogar *alle* natürlichen Fragen bzgl. der Struktur

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in).$$

Sei $A \subset [0,1]$.

Gale/Stewart (1953): Betrachte das folgende Spiel, G(A):

I	i_0		i_2		$\cdots$	
II		i_1		i_3		$\cdots$

$i_n \in \{0,1\}$. D.h. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in [0,1]$.

I gewinnt. gdw. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in A$, ansonsten gewinnt II.

G(A) (oder auch A selbst) heißt *determiniert* gdw. entweder I oder II eine Gewinnstratgie hat.

Sei $A \subset [0,1]$.
Gale/Stewart (1953): Betrachte das folgende Spiel, G(A):

$$\begin{array}{c|ccccccc} I & i_0 & & i_2 & & \cdots & \\ \hline II & & i_1 & & i_3 & & \cdots \end{array}$$

$i_n \in \{0,1\}$. D.h. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in [0,1]$.
I gewinnt. gdw. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in A$, ansonsten gewinnt II.
G(A) (oder auch A selbst) heißt *determiniert* gdw. entweder I oder II eine Gewinnstratgie hat.

Sei $A \subset [0,1]$.
Gale/Stewart (1953): Betrachte das folgende Spiel, G(A):

$$\begin{array}{c|cccccc} I & i_0 & & i_2 & & \cdots & \\ \hline II & & i_1 & & i_3 & & \cdots \end{array}$$

$i_n \in \{0,1\}$. D.h. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in [0,1]$.
I gewinnt. gdw. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in A$, ansonsten gewinnt II.
G(A) (oder auch A selbst) heißt *determiniert* gdw. entweder I oder II eine Gewinnstratgie hat.

Sei $A \subset [0,1]$.
Gale/Stewart (1953): Betrachte das folgende Spiel, G(A):

$$\begin{array}{c|ccccccc} I & i_0 & & i_2 & & \cdots & \\ \hline II & & i_1 & & i_3 & & \cdots \end{array}$$

$i_n \in \{0,1\}$. D.h. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in [0,1]$.
I gewinnt. gdw. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in A$, ansonsten gewinnt II.
G(A) (oder auch A selbst) heißt *determiniert* gdw. entweder I oder II eine Gewinnstratgie hat.

Sei $A \subset [0,1]$.

Gale/Stewart (1953): Betrachte das folgende Spiel, G(A):

$$\begin{array}{c|cccccc} I & i_0 & & i_2 & & \cdots & \\ \hline II & & i_1 & & i_3 & & \cdots \end{array}$$

$i_n \in \{0,1\}$. D.h. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in [0,1]$.

I gewinnt. gdw. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in A$, ansonsten gewinnt II.

G(A) (oder auch A selbst) heißt *determiniert* gdw. entweder I oder II eine Gewinnstratgie hat.

Sei $A \subset [0,1]$.
Gale/Stewart (1953): Betrachte das folgende Spiel, G(A):

I	i_0		i_2		$\cdots$		
II		i_1		i_3		$\cdots$	

$i_n \in \{0,1\}$. D.h. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in [0,1]$.
I gewinnt. gdw. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in A$, ansonsten gewinnt II.
G(A) (oder auch A selbst) heißt *determiniert* gdw. entweder I oder II eine Gewinnstratgie hat.

Martin (1970): Jede Borel-Menge ist determiniert.
Die Determiniertheit der Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ liefert den tieferen Grund dafür, warum $\exists^{\mathbb{R}} A$ entweder höchstens abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.

Projektive Determiniertheit ist die Aussage, daß jede projektive Menge reeller Zahlen determiniert ist.

Davis (1964): Projektive Determiniertheit $\Longrightarrow$ Jede überabzählbare projektive Menge besitzt eine perfekte Teilmenge.

Martin (1970): Jede Borel-Menge ist determiniert.
Die Determiniertheit der Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ liefert den tieferen Grund dafür, warum $\exists^{\mathbb{R}} A$ entweder höchstens abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.

Projektive Determiniertheit ist die Aussage, daß jede projektive Menge reeller Zahlen determiniert ist.

Davis (1964): Projektive Determiniertheit $\Longrightarrow$ Jede überabzählbare projektive Menge besitzt eine perfekte Teilmenge.

Martin (1970): Jede Borel-Menge ist determiniert.
Die Determiniertheit der Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ liefert den tieferen Grund dafür, warum $\exists^{\mathbb{R}} A$ entweder höchstens abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.

Projektive Determiniertheit ist die Aussage, daß jede projektive Menge reeller Zahlen determiniert ist.

Davis (1964): Projektive Determiniertheit $\Longrightarrow$ Jede überabzählbare projektive Menge besitzt eine perfekte Teilmenge.

Martin (1970): Jede Borel-Menge ist determiniert.
Die Determiniertheit der Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ liefert den tieferen Grund dafür, warum $\exists^{\mathbb{R}} A$ entweder höchstens abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.

Projektive Determiniertheit ist die Aussage, daß jede projektive Menge reeller Zahlen determiniert ist.

Davis (1964): Projektive Determiniertheit $\Longrightarrow$ Jede überabzählbare projektive Menge besitzt eine perfekte Teilmenge.

ZFC+ Projektive Determiniertheit entscheidet alle natürlichen Fragen bzgl. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in)$. (Vgl. Peano-Arithmetik und $(\mathbb{N}, +, \cdot)$!)

Sollten wir Projektive Determiniertheit akzeptieren?

Steel-Woodin (199?): Projektive Determiniertheit folgt aus der Invarianz der Theorie von $L(\mathbb{R})$ unter Forcing-Erweiterungen.

Wenn eine "natürliche" Aussage die Konsistenz von Projektiver Determiniertheit impliziert, dann impliziert sie bereits Projektive Determiniertheit selbst.

ZFC+ Projektive Determiniertheit entscheidet alle natürlichen Fragen bzgl. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in)$. (Vgl. Peano-Arithmetik und $(\mathbb{N}, +, \cdot)$!)

Sollten wir Projektive Determiniertheit akzeptieren?

Steel-Woodin (199?): Projektive Determiniertheit folgt aus der Invarianz der Theorie von $L(\mathbb{R})$ unter Forcing-Erweiterungen.

Wenn eine "natürliche" Aussage die Konsistenz von Projektiver Determiniertheit impliziert, dann impliziert sie bereits Projektive Determiniertheit selbst.

ZFC+ Projektive Determiniertheit entscheidet alle natürlichen Fragen bzgl. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in)$. (Vgl. Peano-Arithmetik und $(\mathbb{N}, +, \cdot)$!)

Sollten wir Projektive Determiniertheit akzeptieren?

Steel-Woodin (199?): Projektive Determiniertheit folgt aus der Invarianz der Theorie von $L(\mathbb{R})$ unter Forcing-Erweiterungen.

Wenn eine "natürliche" Aussage die Konsistenz von Projektiver Determiniertheit impliziert, dann impliziert sie bereits Projektive Determiniertheit selbst.

ZFC+ Projektive Determiniertheit entscheidet alle natürlichen Fragen bzgl. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in)$. (Vgl. Peano-Arithmetik und $(\mathbb{N}, +, \cdot)$!)

Sollten wir Projektive Determiniertheit akzeptieren?

Steel-Woodin (199?): Projektive Determiniertheit folgt aus der Invarianz der Theorie von $L(\mathbb{R})$ unter Forcing-Erweiterungen.

Wenn eine "natürliche" Aussage die Konsistenz von Projektiver Determiniertheit impliziert, dann impliziert sie bereits Projektive Determiniertheit selbst.

ZFC+ Projektive Determiniertheit entscheidet alle natürlichen Fragen bzgl. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in)$. (Vgl. Peano-Arithmetik und $(\mathbb{N}, +, \cdot)$!)

Sollten wir Projektive Determiniertheit akzeptieren?

Steel-Woodin (199?): Projektive Determiniertheit folgt aus der Invarianz der Theorie von $L(\mathbb{R})$ unter Forcing-Erweiterungen.

Wenn eine "natürliche" Aussage die Konsistenz von Projektiver Determiniertheit impliziert, dann impliziert sie bereits Projektive Determiniertheit selbst.

Was sagt die heutige Mengenlehre zur Kontinuumshypothese (CH)? Die Frage der Gültigkeit von CH wird in der Struktur

$$(H_{\omega_2}; \in)$$

entschieden, der nächsten Stufe nach $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ und $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}; +, \cdot, \in)$.

Gödel hatte nachgewiesen, daß CH in seinem Modell L gilt.
CH gilt ebenfalls in allen konstruktiblen inneren Modellen der Form $L[E]$, die große Kardinalzahlen enthalten.
Alle diese Modelle haben jedoch eine "definierbare" Wohlordnung der Menge der reellen Zahlen.

Was sagt die heutige Mengenlehre zur Kontinuumshypothese (CH)? Die Frage der Gültigkeit von CH wird in der Struktur

$$(H_{\omega_2}; \in)$$

entschieden, der nächsten Stufe nach $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ und $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}; +, \cdot, \in)$.

Gödel hatte nachgewiesen, daß CH in seinem Modell L gilt.
CH gilt ebenfalls in allen konstruktiblen inneren Modellen der Form $L[E]$, die große Kardinalzahlen enthalten.
Alle diese Modelle haben jedoch eine "definierbare" Wohlordnung der Menge der reellen Zahlen.

Was sagt die heutige Mengenlehre zur Kontinuumshypothese (CH)? Die Frage der Gültigkeit von CH wird in der Struktur

$$(H_{\omega_2}; \in)$$

entschieden, der nächsten Stufe nach $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ und $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}; +, \cdot, \in)$.

Gödel hatte nachgewiesen, daß CH in seinem Modell L gilt.
CH gilt ebenfalls in allen konstruktiblen inneren Modellen der Form $L[E]$, die große Kardinalzahlen enthalten.
Alle diese Modelle haben jedoch eine "definierbare" Wohlordnung der Menge der reellen Zahlen.

Was sagt die heutige Mengenlehre zur Kontinuumshypothese (CH)? Die Frage der Gültigkeit von CH wird in der Struktur

$$(H_{\omega_2}; \in)$$

entschieden, der nächsten Stufe nach $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ und $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}; +, \cdot, \in)$.

Gödel hatte nachgewiesen, daß CH in seinem Modell L gilt.
CH gilt ebenfalls in allen konstruktiblen inneren Modellen der Form $L[E]$, die große Kardinalzahlen enthalten.
Alle diese Modelle haben jedoch eine "definierbare" Wohlordnung der Menge der reellen Zahlen.

Was sagt die heutige Mengenlehre zur Kontinuumshypothese (CH)? Die Frage der Gültigkeit von CH wird in der Struktur

$$(H_{\omega_2}; \in)$$

entschieden, der nächsten Stufe nach $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ und $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}; +, \cdot, \in)$.

Gödel hatte nachgewiesen, daß CH in seinem Modell L gilt.
CH gilt ebenfalls in allen konstruktiblen inneren Modellen der Form $L[E]$, die große Kardinalzahlen enthalten.
Alle diese Modelle haben jedoch eine "definierbare" Wohlordnung der Menge der reellen Zahlen.

Gödel hatte geglaubt, daß $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Foreman-Magidor-Shelah (1988): Wenn Martin's Maximum gilt, dann ist $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Woodin (1991): Wenn Martin's Maximum gilt, dann gibt es eine Surjektion $f \colon \mathbb{R} \to \aleph_2$, so daß die Menge $\{(x, y) \colon f(x) < f(y)\}$ projektiv ist.

Moore-Todorcevic-Velickovic (198? - 2003):

Alle übrigen gängigen Forcing-Axiome implizieren ebenfalls $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Gödel hatte geglaubt, daß $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.
Foreman-Magidor-Shelah (1988): Wenn Martin's Maximum gilt, dann ist $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.
Woodin (1991): Wenn Martin's Maximum gilt, dann gibt es eine Surjektion $f : \mathbb{R} \to \aleph_2$, so daß die Menge $\{(x, y) : f(x) < f(y)\}$ projektiv ist.
Moore-Todorcevic-Velickovic (198? - 2003):
Alle übrigen gängigen Forcing-Axiome implizieren ebenfalls $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Gödel hatte geglaubt, daß $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Foreman-Magidor-Shelah (1988): Wenn Martin's Maximum gilt, dann ist $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Woodin (1991): Wenn Martin's Maximum gilt, dann gibt es eine Surjektion $f\colon \mathbb{R} \to \aleph_2$, so daß die Menge $\{(x, y) \colon f(x) < f(y)\}$ projektiv ist.

Moore-Todorcevic-Velickovic (198? - 2003):

Alle übrigen gängigen Forcing-Axiome implizieren ebenfalls $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Gödel hatte geglaubt, daß $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.
Foreman-Magidor-Shelah (1988): Wenn Martin's Maximum gilt, dann ist $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.
Woodin (1991): Wenn Martin's Maximum gilt, dann gibt es eine Surjektion $f \colon \mathbb{R} \to \aleph_2$, so daß die Menge $\{(x, y) \colon f(x) < f(y)\}$ projektiv ist.
Moore-Todorcevic-Velickovic (198? - 2003):
Alle übrigen gängigen Forcing-Axiome implizieren ebenfalls $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Gödels Vollständigkeitssatz: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow$ jedes (abzählbare) Modell von T ist auch Modell von φ.

Ω-Logik: $T \vdash_\Omega \varphi \Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ es gibt ein $A \subset \mathbb{R}$, A universell Bairesch, so daß jedes A-abgeschlossene abzählbare Modell von T auch Modell von φ ist.

Woodin (199?): Es gibt eine Aussage $(*)$, so daß ZFC $+ (*)$ Ω-konsistent und Ω-vollständig bzgl. Aussagen der Gestalt $\Pi_2^{H_{\omega_2}}$ ist. ZFC $+ (*)$ beweist die Negation von CH.

Gödels Vollständigkeitssatz: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow$ jedes (abzählbare) Modell von T ist auch Modell von φ.

Ω-Logik: $T \vdash_\Omega \varphi \Leftrightarrow_{\text{def}}$ es gibt ein $A \subset \mathbb{R}$, A universell Bairesch, so daß jedes A-abgeschlossene abzählbare Modell von T auch Modell von φ ist.

Woodin (199?): Es gibt eine Aussage $(*)$, so daß ZFC $+ (*)$ Ω-konsistent und Ω-vollständig bzgl. Aussagen der Gestalt $\Pi_2^{H_{\omega_2}}$ ist. ZFC $+ (*)$ beweist die Negation von CH.

Gödels Vollständigkeitssatz: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow$ jedes (abzählbare) Modell von T ist auch Modell von φ.

Ω-Logik: $T \vdash_\Omega \varphi \Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ es gibt ein $A \subset \mathbb{R}$, A universell Bairesch, so daß jedes A-abgeschlossene abzählbare Modell von T auch Modell von φ ist.

Woodin (199?): Es gibt eine Aussage $(*)$, so daß ZFC $+ (*)$ Ω-konsistent und Ω-vollständig bzgl. Aussagen der Gestalt $\Pi_2^{H_{\omega_2}}$ ist. ZFC $+ (*)$ beweist die Negation von CH.

Eine provozierende andere Meinung:

Saharon Shelah: Cantor hat offensichtlich die falsche Frage gestellt, da CH unabhängig von ZFC ist.

Er hätte stattdessen z.B. folgendes fragen sollen:

Angenommen, $\aleph_\omega$ ist eine starke Limeskardinalzahl (d.h. $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Welchen Wert kann dann $2^{\aleph_\omega}$ haben?

Eine provozierende andere Meinung:
Saharon Shelah: Cantor hat offensichtlich die falsche Frage gestellt, da CH unabhängig von ZFC ist.
Er hätte stattdessen z.B. folgendes fragen sollen:
Angenommen, $\aleph_\omega$ ist eine starke Limeskardinalzahl (d.h. $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Welchen Wert kann dann $2^{\aleph_\omega}$ haben?

Eine provozierende andere Meinung:
Saharon Shelah: Cantor hat offensichtlich die falsche Frage gestellt, da CH unabhängig von ZFC ist.
Er hätte stattdessen z.B. folgendes fragen sollen:
Angenommen, $\aleph_\omega$ ist eine starke Limeskardinalzahl (d.h. $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Welchen Wert kann dann $2^{\aleph_\omega}$ haben?

Eine provozierende andere Meinung:

Saharon Shelah: Cantor hat offensichtlich die falsche Frage gestellt, da CH unabhängig von ZFC ist.

Er hätte stattdessen z.B. folgendes fragen sollen:

Angenommen, $\aleph_\omega$ ist eine starke Limeskardinalzahl (d.h. $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Welchen Wert kann dann $2^{\aleph_\omega}$ haben?

Tatsache: Wir besitzen keine allgemein akzeptierte Axiomatisierung der Struktur

$$(H_{\omega_2}; \in),$$

die vollständig bzgl. aller natürlichen Aussagen ist, die in dieser Struktur entschieden werden.

Wir sind uns nicht einmal einig, ob und (falls ja) wie nach einer solchen Axiomatisierung gesucht werden soll/kann.
Teil der Lösung wird es sein, die Forschergemeinschaft davon zu überzeugen, daß die vorgeschlagenen Lösung tatsächlich eine Lösung darstellt.

Tatsache: Wir besitzen keine allgemein akzeptierte Axiomatisierung der Struktur

$$(H_{\omega_2}; \in),$$

die vollständig bzgl. aller natürlichen Aussagen ist, die in dieser Struktur entschieden werden.

Wir sind uns nicht einmal einig, ob und (falls ja) wie nach einer solchen Axiomatisierung gesucht werden soll/kann.
Teil der Lösung wird es sein, die Forschergemeinschaft davon zu überzeugen, daß die vorgeschlagenen Lösung tatsächlich eine Lösung darstellt.

Tatsache: Wir besitzen keine allgemein akzeptierte Axiomatisierung der Struktur

$$(H_{\omega_2}; \in),$$

die vollständig bzgl. aller natürlichen Aussagen ist, die in dieser Struktur entschieden werden.

Wir sind uns nicht einmal einig, ob und (falls ja) wie nach einer solchen Axiomatisierung gesucht werden soll/kann.
Teil der Lösung wird es sein, die Forschergemeinschaft davon zu überzeugen, daß die vorgeschlagenen Lösung tatsächlich eine Lösung darstellt.