1.7. Lokalisierung

Erinnerung. Zu einem Integritätsring R konstruiert man den Quotientenkörper

$$Q \;=\; \{\,(a,b) \in\; R \times (R \setminus \{0\})\,\}/\sim \qquad \text{wobei}$$
$$(a,b) \sim (a',b') \quad :\Longleftrightarrow \; ab' - a'b = 0 \quad \text{in } R\,.$$

Q entsteht durch Invertieren aller Elemente von $R \setminus \{0\}$. Die Äquivalenzklasse von (a,b) wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet.

Definition 1.7.1. Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $U \subset R$ heißt *multiplikativ abgeschlossen*, falls gilt: $1 \in U$ und für alle $b, b' \in U$ ist auch $bb' \in U$.

Beispiele 1.7.2. a) Ist R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so ist $U := R \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen.

b) Ist R ein Integritätsring, so ist (0) Primideal und $U = R \setminus \{0\}$ multiplikativ abgeschlossen.

c) Ist R ein Ring und $b \in R$, so ist $U := \{1, b, b^2, b^3, \ldots\}$ multiplikativ abgeschlossen.

Definition 1.7.3. Sei R ein Ring und $U \subset R$ multiplikativ abgeschlossen.

a) Auf der Menge $R \times U$ definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$(a,b) \sim (a',b') \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, c \in U \text{ mit } \; c(ab' - a'b) = 0 \quad \text{in } R\,.$$

b) Die *Lokalisierung von R bei U* ist die Menge der Äquivalenzklassen

$$U^{-1}R \;:=\; \{(a,b) \in R \times U\}/\sim\,.$$

Die Äquivalenzklasse von $(a,b) \in R \times U$ wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet.

c) Mit der (wohldefinierten!) Addition und Mulltiplikation

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \;:=\; \frac{ab' + a'b}{bb'}\,, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \;:=\; \frac{aa'}{bb'}$$

wird $U^{-1}R$ zu einem Ring mit dem kanonischen Homomorphismus $\rho : R \to U^{-1}R, a \mapsto \frac{a}{1}$.

Beispiele 1.7.4. a) Sei R ein Integritätsring und $U = R \setminus \{0\}$. Dann ist

$$(a,b) \sim (a',b') \iff \exists\, c \in U \text{ mit } \; c(ab' - a'b) = 0 \iff ab' - a'b = 0 \quad \text{in } R\,.$$

Somit ist $U^{-1}R = Q$ der Quotientenkörper.

b) Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und $U = R \backslash \mathfrak{p}$. Dann heißt $R_{\mathfrak{p}} := U^{-1}R$ die *Lokalisierung von R bei $\mathfrak{p}$*. Alle Elemente von $U = R \backslash \mathfrak{p}$ sind invertierbar in $R_{\mathfrak{p}}$. Der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ besitzt ein einziges maximales Ideal, nämlich

$$U^{-1}\mathfrak{p} \;=\; \left\{\, \frac{a}{b} \;:\; a \in \mathfrak{p}, b \in U \,\right\}.$$

c) Sei R ein Ring, $b \in R$ und $U = \{1, b, b^2, \ldots\}$. Dann heißt $R_b := U^{-1}R$ die *Lokalisierung von R bei b*. Alle Potenzen von b sind invertierbar in R_b. Es ist

$$R[X]/(bX - 1) \xrightarrow{\sim} R_b\,, \quad X \mapsto \tfrac{1}{b} \qquad \text{ein Isomorphismus.}$$

d) Sei R ein Ring und $U \subset R$ multiplikativ abgeschlossen mit $0 \in U$. Dann ist $U^{-1}R = (0)$ der Nullring.

Satz 1.7.5 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung).
Sei R ein Ring und $U \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ mit $\varphi(U) \subset S^\times$ (Einheitengruppe) einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\widetilde{\varphi} : U^{-1}R \to S$ mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \rho$. Es gilt $\widetilde{\varphi}(\frac{a}{b}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\forall\varphi"'] \arrow[dr, "\rho"'] & & S \\
& U^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\widetilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Da $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \rho$ gelten soll, muss $\widetilde{\varphi}(\frac{a}{1}) = \varphi(a)$ sein und

$$\varphi(a) \;=\; \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{a}{1}\big) \;=\; \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{b}{1}\big) \;=\; \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{a}{b}\big) \cdot \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{b}{1}\big) \;=\; \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{a}{b}\big) \cdot \varphi(b)\,.$$

Also muss $\widetilde{\varphi}(\frac{a}{b}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$ sein. Dies ist auch wohldefiniert, denn $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ bedeutet, es gibt ein $c \in U$ mit $c(ab' - a'b) = 0$. Somit gilt in S

$$\varphi(c)\big(\varphi(a)\varphi(b') - \varphi(a')\varphi(b)\big) = 0\,.$$

Und da $\varphi(b), \varphi(b'), \varphi(c)$ invertierbar in S sind, folgt $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a')\varphi(b')^{-1}$. Man rechnet nach, dass $\widetilde{\varphi}$ mit dieser Definition ein Homomorphismus $U^{-1}R \to S$ ist. $\square$