Musterlösung 1. Klausur

(1)

1. $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$

Satz des Pythagoras: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

$$= |AB|^2 + \frac{1}{4}|AB|^2 = \frac{5}{4}|AB|^2$$

$$\Rightarrow |AC| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AB|$$

$$|CD| = |BC| = \frac{1}{2}|AB|$$

$$\Rightarrow |AS| = |AD| = |AC| - |CD| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}|AB|$$

$\circledast$ s.u.

$$|SB| = |AB| - |AS| = \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)|AB| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}|AB|$$

z.z. $\frac{|AB|}{|AS|} \overset{!}{=} \frac{|AS|}{|SB|}$ oder äquivalent

z.z. $|AB| \cdot |SB| = |AS|^2$

$$|AS|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}|AB|\right)^2 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2^2}|AB|^2$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}|AB|^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}|AB|^2$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2}|AB|^2 = |AB| \cdot |SB| \quad \text{OK}$$

Alternative ab $\circledast$

z.z. $\frac{|AB|}{|AS|} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ Goldener Schnitt

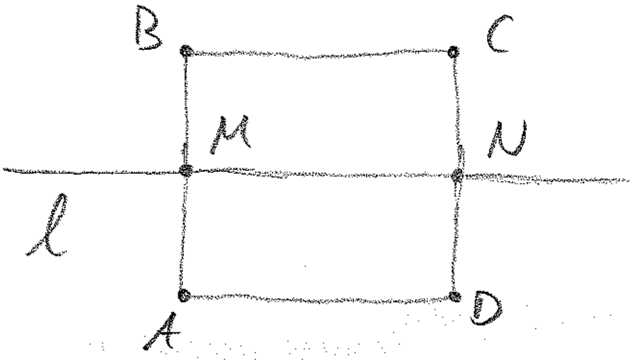
äquivalent $|AB| = \Phi \cdot |AS|$

$$\Phi \cdot |AS| = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}|AB| = \frac{5-1}{2 \cdot 2} \cdot |AB| = |AB| \text{ OK}$$

2. Wir zeigen zunächst $f(C)=D$, $f(D)=C$.

Dazu <u>Beh:</u> l ist auch Mittelsenkrechte von C, D

<u>Bew:</u> Sei M der Mittelpunkt von $[AB]$ und N der Mittelpunkt von $[CD]$



Dann gilt

$|AM| = |BM| = \frac{1}{2}|AB|$

$|CN| = |DN| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AB|$

Betrachte die Dreiecke ΔAND, ΔBNC

Diese sind kongruent nach Satz SWS (1.3.3)

mit rechten Winkeln $\measuredangle ADN$, $\measuredangle BCN$

und $|AD| = |BC|$, $|DN| = |CN|$

Daraus folgt $|AN| = |BN|$.

Ebenso sieht man dass ΔDMA, ΔCMB kongruent sind nach Satz SWS (1.3.3)

mit rechten Winkeln $\measuredangle MAD$, $\measuredangle MBC$

und $|AD| = |BC|$, $|AM| = |BM|$

Daraus folgt $|DM| = |CM|$.

Nach Satz 1.2.12 gilt $M \in l$, $N \in l$

wegen $|AM| = |BM|$ und $|AN| = |BN|$.

(2b)

Sei $\tilde{l}$ die Mittelsenkrechte von C, D

Wegen $|CM| = |DM|$ und $|CN| = |DN|$

gilt $M \in \tilde{l}$, $N \in \tilde{l}$ nach Satz 1.2.12.

Somit gilt $l = \tilde{l}$ nach Prop 1.1.5

Dies zeigt die Beh.

Es gilt also: Spiegelung an $\tilde{l}$ = Spiegelung an l $= f$

und nach Satz 1.2.12

folgt $f(C) = D$, $f(D) = C$

Da f Strecken auf Strecken abbildet

(Blatt , Aufg) gilt

$f([AB]) = [BA]$

$f([AD]) = [BC]$

$f([BC]) = [AD]$

$f([CD]) = [DC]$

Insgesamt gilt $f(Q) = Q$ denn

$Q = [AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$.

$\square$

(3a)

3. $\sum_{m \geq 3} m E_m \overset{!}{=} 2K$

Beweis: Die Menge $M = \{ (Q, s) :$ Q Ecke v. X, s Kante v. X, $Q \in s \}$

hat Mächtigkeit $2 \cdot K$

denn $\#\{\text{Kanten } s\} = K$ und $\#\{\text{Endpunkte von } s\} = 2$

Es gilt $M = \dot{\bigcup}_{m \geq 3} \underbrace{\{ (Q, s) : Q \text{ Ecke mit } m \text{ Nachbarn}, s \text{ Kante}, Q \in s \}}_{=: M_m}$

also $\# M = \sum_{m \geq 3} \# M_m$

und $\# M_m = m \cdot E_m$, denn

$\#\{\text{Ecken } Q \text{ mit } m \text{ Nachbarn}\} = E_m$

$\#\{\text{Kanten } s, \text{ die solch ein } Q \text{ enthalten}\} = m$

$\sum_{n \geq 3} n F_n = 2K$

Beweis: Die Menge $N = \{ (p, s) :$ p Fläche v. X, s Kante, $s \subseteq p \}$

hat Mächtigkeit $2K$

denn $\#\{\text{Kanten } s\} = K$ und $\#\{\text{Flächen die } s \text{ enthalten}\} = 2$

(Axiom (P1) von Def 2.1.1)

Es gilt $N = \dot{\bigcup}_{n \geq 3} \underbrace{\{ (p, s) : p \text{ ist } n\text{-Eck-Fläche von } X, s \text{ Kante von } X, s \subseteq p \}}_{=: N_n}$

also $\# N = \sum_{n \geq 3} \# N_n$

und $\# N_n = n \cdot F_n$, denn

$\#\{n\text{-Eck-Flächen } p\} = F_n$

$\#\{\text{Kanten einer } n\text{-Eck-Fläche } p\} = n.$

Nun $E = \sum_{m \geq 3} E_m$, $F = \sum_{n \geq 3} F_n$

Z: $F_3 \neq 0$ oder $E_3 \neq 0$

(d.h. es gibt mindestens eine Dreiecksfläche oder eine Ecke mit genau drei Nachbarn.)

Annahme $F_3 = 0$, $E_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad 2K = \sum_{m \geq 4} m E_m \geq \sum_{m \geq 4} 4 \cdot E_m = 4 \cdot \sum_{m \geq 4} E_m = 4E$$

und $2K = \sum_{n \geq 4} n F_n \geq \sum_{n \geq 4} 4 \cdot F_n = 4 \cdot \sum_{n \geq 4} F_n = 4F$

Zusammen $4K = 2K + 2K \geq 4E + 4F$

$$\Rightarrow \quad E + F - K \leq 0$$

Dies ist ein Widerspruch zu Eulers Polyederformel

Satz 2.2.1: $2 = E + F - K \leq 0$ ↯

(4a)

4. Für $v \in \mathbb{R}^3$, $A \in O_3(\mathbb{R})$ betrachte die Kong.abb.

$f_{A,v}: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$, $x \mapsto v + Ax$.

Nach Satz 1.2.7 ist $\text{Kong}(\mathbb{E}_3) = \{f_{A,v} \mid v \in \mathbb{R}^3, A \in O_3(\mathbb{R})\}$

mit $\underset{\underset{f_{AB,\, v+Aw}}{\parallel}}{f_{A,v} \circ f_{B,w}} : x \longmapsto v + \underset{\underset{v+Aw+ABx}{\parallel}}{A(w+Bx)}$

$f_{AB,\, v+Aw}: x \mapsto v + Aw + ABx$

$T = \{ t_v: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3,\ x \mapsto v + x \mid v \in \mathbb{R}^3 \}$

$L = \{ f_A: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3,\ x \mapsto Ax \mid A \in O_3(\mathbb{R}) \}$

a) $T \subseteq \text{Kong}(\mathbb{E}_3)$ ist Untergruppe

z.z. $id_{\mathbb{E}_3} \in T$, $id = t_0$

z.z. $t_v \circ t_w \in T \ \forall v, w \in \mathbb{R}^3$.

Dazu $t_v \circ t_w = t_{v+w} \in T$ (Prop 1.1.

z.z. $t_v^{-1} \in T \ \forall v \in \mathbb{R}^3$

Dazu $t_v: x \mapsto v + x \Rightarrow t_v^{-1} = \overset{\overset{T}{\in}}{t_{-v}}: x \mapsto -v + x$

$L \subseteq \text{Kong}(\mathbb{E}_3)$ ist Untergruppe

z.z. $id_{\mathbb{E}_3} \in L$, Dazu $id = f_{id} \in L$

z.z. $f_A \circ f_B \in L \ \forall A, B \in O_3(\mathbb{R})$

Dazu $f_A \circ f_B: x \mapsto A(Bx) = AB \cdot x$

also $f_A \circ f_B = f_{AB} \in L$

z.z. $f_A^{-1} \in L \ \forall A \in O_3(\mathbb{R})$

Dazu $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}} \in L$

(4b)

b) Definiere $\alpha : \mathrm{Kong}(\mathbb{E}_3) \to L$

durch $f_{A,v} \mapsto f_A$

Dann gilt $\alpha(f_{A,v} \circ f_{B,w}) = \alpha(f_{AB, v+Aw})$

$= f_{AB} = f_A \circ f_B = \alpha(f_{A,v}) \circ \alpha(f_{B,w})$

Also ist α ein Gruppenhomom

Z $\alpha|_L = id_L$ Sei $f_A \in L$

Dann gilt $f_A = f_{A,0} : x \mapsto 0 + Ax$

und $\alpha(f_A) = \alpha(f_{A,0}) = f_A = id_L(f_A)$

Z $\ker \alpha = T$

$\ker \alpha = \{ f_{A,v} : \alpha(f_{A,v}) = id_{\mathbb{E}_3} \}$

$\alpha(f_{A,v}) = f_A$, $id_{\mathbb{E}_3} = f_{Id}$

$f_A = f_{Id} : x \mapsto Ax = Id \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{E}_3$

$\Rightarrow A = Id$

$\Rightarrow f_{A,v} : x \mapsto v + Id\, x$

$\Rightarrow f_{A,v} = t_v \in T$ Also $\ker \alpha \subseteq T$

Umgekehrt: $t_v \in T \Rightarrow t_v = f_{Id,v} : x \mapsto v + Id \cdot x$

$\Rightarrow \alpha(t_v) = \alpha(f_{Id,v}) = f_{Id} = id_{\mathbb{E}_3} \Rightarrow t_v \in \ker \alpha$

Also $T \subseteq \ker \alpha$. Insgesamt $\ker \alpha = T$.