Platonische und archimedische Körper
WiSe 2008/09

Prof. Dr. Urs Hartl
Dr. Tobias Schmidt

3. Übungsblatt

Abgabetermin: Do, 6.11.08, 8:00 Uhr, vor der Vorlesung

1. Seien $h = \{x + tv, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ und $h' = \{x + tw, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ mit $x \in \mathbb{E}_3$, $v, w \in \mathbb{R}^3$ zwei Halbgeraden im $\mathbb{E}_3$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Behauptungen:
   (i) h und h' bilden einen rechten Winkel.
   (ii) $\langle v, v' \rangle = 0$ für das Standardskalarprodukt $\langle . \, , \, . \rangle$ des $\mathbb{R}^3$.

2. Sei ABC ein Dreieck, sodaß A, B, C nicht auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie: Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt U. Der Kreis $\{Q \in \mathbb{E}_2 : |QU| = |AU|\}$ enthält die Punkte A, B, C, und er ist der einzige Kreis mit dieser Eigenschaft.
   Man nennt U den Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

3. Sei $K \subseteq \mathbb{E}_2$ ein Kreis mit Mittelpunkt M sowie $A, B, C \in K$ verschiedene Punkte. Formulieren Sie die Aussage $\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle ACB$ präzise, und beweisen Sie sie.
   Tipp:
   Betrachten Sie die Gerade durch C und M und den zweiten Schnittpunkt D dieser Geraden mit K. Zeigen Sie $\sphericalangle AMD = 2\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle BMD = 2\sphericalangle BCD$.

4. Seien h, h' Halbgeraden in $\mathbb{E}_2$ mit Anfangspunkten A, A', sodaß $A \notin h'$, $A' \notin h$ und $h \cap h' \neq \emptyset$. Sei f die Spiegelung an der Geraden durch A, A'. Dann gilt $f(h) \cap h' = \emptyset$.