Platonische und archimedische Körper
WiSe 2008/09

Prof. Dr. Urs Hartl
Dr. Tobias Schmidt

# 7. Übungsblatt

Abgabetermin: Do, 4.12.08, 8:00 Uhr, vor der Vorlesung

1. Sei $X \subset \mathbb{E}_3$ ein konvexes Polyeder, dessen Flächen konvexe Polygone sind. Seien $E, K, F$ die Anzahlen seiner Ecken, Kanten, bzw. Flächen. Zeigen Sie:

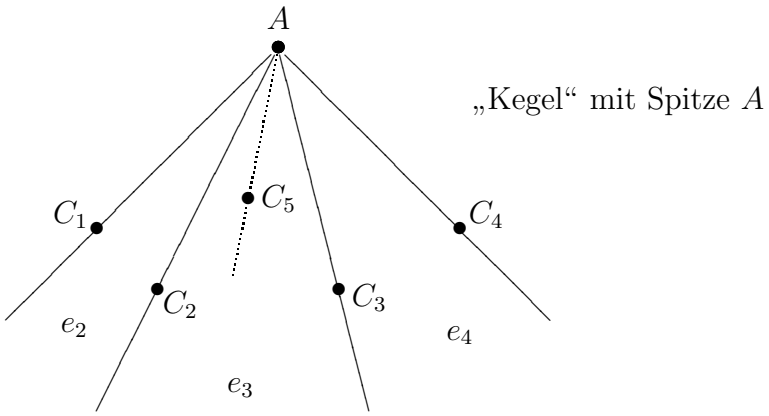
   (a) $K + 6 \leq 3E \leq 2K\,,\ K + 6 \leq 3F \leq 2K$.

   (b) Der Fall $K = 7$ ist unmöglich.

   (c) Ist $F_n$ die Anzahl der $n$-Ecks-Flächen von $X$, so gilt $3F_3 + 2F_4 + F_5 \geq 12$. Geben Sie Beispiele, in denen Gleichheit gilt.

   (d) Ist $E_n$ die Anzahl der Ecken von $X$, die auf $n$ Kanten liegen, so gilt $3E_3 + 2E_4 + E_5 \geq 12$. Geben Sie Beispiele, in denen Gleichheit gilt.

2. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C_1, \ldots, C_n$ ($n \geq 3$) Punkte in $\mathbb{E}_3$, so dass keine drei der $C_i$ zusammen mit $A$ in einer Ebene liegen. Sei $e_i$ die Ebene durch $A, C_{i-1}, C_i$ ($C_0 := C_n$). Sei $B \in \mathbb{E}_3$ ein Punkt mit $B \sim_{e_i} C_j$ für alle $j \neq i-1, i$. Zeigen Sie:




   (a) Es gibt $\alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i$
   (Tipp: Falls $n = 3$, so sei $v_i \in \mathbb{R}^3$ senkrecht zur Ebene $e_{i-1}$. Dann kann man $\alpha_i := \frac{\langle B, v_i \rangle}{\langle C_i, v_i \rangle} \geq 0$ nehmen.
   Falls $n > 3$, unterteilen Sie den „Kegel“ mit Spitze $A$ durch die Ebenen, welche $A, C_1, C_i$ ($3 \leq i \leq n-1$) enthalten, um auf den Fall $n = 3$ zu reduzieren.)

   (b) Liegen alle $C_i$ tiefer als $A$, so liegt auch $B$ tiefer als $A$. (Dabei sagen wir, ein Punkt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *liegt tiefer* als $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, falls $x_3 < 0$.)