Platonische und archimedische Körper
WiSe 2008/09

Prof. Dr. Urs Hartl
Dr. Tobias Schmidt

Probeklausur 1

1. Zeigen Sie: Eine Gerade und ein Kreis in $\mathbb{E}_2$ (beziehungsweise eine Kugel in $\mathbb{E}_3$) schneiden sich in höchstens zwei Punkten.

2. Seien h, h' Halbgeraden in $\mathbb{E}_2$ mit Anfangspunkten A, A', sodaß $A \notin h'$, $A' \notin h$ und $h \cap h' \neq \emptyset$. Sei f die Spiegelung an der Geraden durch A, A'. Dann gilt $f(h) \cap h' = \emptyset$.

3. Sei ΔABC ein Dreieck im $\mathbb{E}_2$.

   a) Sei P ein Punkt auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$ und sei $D \in \mathbb{E}_2$ der Schnittpunkt der Geraden AB mit dem Lot durch P auf die Gerade AB, sowie E der entsprechende Punkt für die Gerade BC.
   Zeigen Sie: $|PD| = |PE|$.

   b) Zeigen Sie: Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.

4. Sei $X \subset \mathbb{E}_3$ ein konvexes Polyeder, dessen Flächen konvexe Polygone sind. Seien E, K, F die Anzahlen seiner Ecken, Kanten, bzw. Flächen. Zeigen Sie:

   (a) $K + 6 \leq 3E \leq 2K$, $K + 6 \leq 3F \leq 2K$.

   (b) Der Fall $K = 7$ ist unmöglich.

   (c) Ist F_n die Anzahl der n-Ecks-Flächen von X, so gilt $3F_3 + 2F_4 + F_5 \geq 12$. Geben Sie Beispiele, in denen Gleichheit gilt.

   (d) Ist E_n die Anzahl der Ecken von X, die auf n Kanten liegen, so gilt $3E_3 + 2E_4 + E_5 \geq 12$. Geben Sie Beispiele, in denen Gleichheit gilt.