Prof. Dr. Urs Hartl
Dr. Tobias Schmidt

Probeklausur 2

1. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ eine Kongruenz und sind $P, Q \in \mathbb{E}_3$ zwei Punkte, so gilt $|PQ| = |f(P)\, f(Q)|$, d.h. f erhält Abstände. Außerdem bildet f Geraden auf Geraden, Halbgeraden auf Halbgeraden, Strecken auf Strecken und Kugeln auf Kugeln ab.

2. Beweisen Sie Prop. 1.5.3 aus der Vorlesung.
   (Tipp: Für die Transitivität schreiben Sie ℓ in der Form
   $$\ell = \{x \in \mathbb{E}_2 : \langle x - v, a \rangle = 0\} \text{ mit } v \in \ell, a \in \mathbb{R}^2$$
   und zeigen: $A \sim_\ell B$ genau dann, wenn $\langle A - v, a\rangle$ und $\langle B - v, a\rangle$ dasselbe Vorzeichen haben.)

3. Gegeben sei eine Kugel im $\mathbb{E}_3$ mit Mittelpunkt M und eine Ebene e im $\mathbb{E}_3$. Sei ℓ das Lot auf e durch M und M' der Schnittpunkt von ℓ und e. Zeigen Sie:

   Schneidet die Kugel die Ebene e, so ist die Schnittmenge ein Kreis mit Mittelpunkt M'.

4. Sei $[A_0A_1...A_n], n \geq 3$ ein Polygon im $\mathbb{E}_2$, sodass alle Kanten $[A_{i-1}A_i]$, $1 \leq i \leq n$ diesselbe Länge haben. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
   (a) $[A_0A_1...A_n]$ ist ein reguläres Polygon, i.e. alle Winkel sind kongruent,
   (b) es existiert eine Rotation f des $\mathbb{E}_2$ mit $f(A_{i-1}) = A_i$ für alle $1 \leq i \leq n$,
   (c) es gibt einen Punkt $M \in \mathbb{E}_2$, sodass alle Ecken A_i denselben Abstand zu M haben (M heisst das *Zentrum* des Polygons).