Übungen Platonische und Archimedische Körper WS 2009/2010
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 11
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Dienstag, 12.01.2010, 14:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1: Sei $G \subset \mathrm{Cong}(\mathbb{R}^3)$ eine endliche Untergruppe der Ordnung n. Zeigen Sie: Dann gibt es (mindestens) einen Punkt $Z \in \mathbb{R}^3$ mit $f(Z) = Z$ für alle $f \in G$.

Hinweis: Wählen Sie ein beliebiges $a \in \mathbb{R}^3$ und setzen Sie $z := \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g(a)$.

Aufgabe 2: Zu zwei natürlichen Zahlen i und j sei δ_{ij} das zugehörige Kroneckersymbol. Ist n eine feste natürliche Zahl und $\sigma \in S_n$, so sei ferner $A_\sigma = (a_{ij})_{i,j}$ die relle $n \times n$-Matrix mit den Einträgen $a_{ij} := \delta_{i\sigma(j)}$. Zeigen Sie, dass durch $\sigma \mapsto A_\sigma$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus $S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ definiert wird. Geben Sie im Fall $n = 3$ explizit die Ecken eines platonischen Körpers $X \subset \mathbb{R}^3$ an, sodass $A_\sigma \in \mathrm{Sym}(X)$ gilt für alle $\sigma \in S_3$.

Aufgabe 3 (Parallelogramm): Sei $[P_0P_1P_2P_3P_4]$ ein konvexes Viereck in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Geraden P_1P_2 und P_3P_4, sowie die Geraden P_1P_4 und P_2P_3 sind parallel.

(b) Die Mittelpunkte der Diagonalen $[P_1P_3]$ und $[P_2P_4]$ stimmen überein.

(c) $|P_1P_2| = |P_3P_4|$ und $|P_1P_4| = |P_2P_3|$.

Falls diese Bedingungen erfüllt sind, so heiß $[P_0P_1P_2P_3P_4]$ ein *Parallelogramm*.

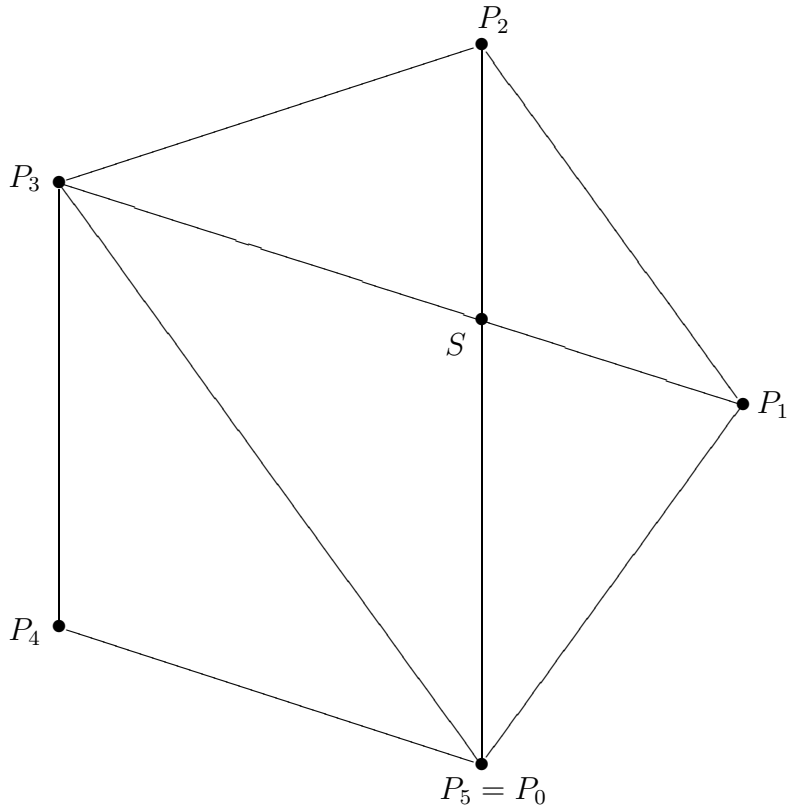
Aufgabe 4: Gegeben sei eine Strecke $[AB]$ und ein Punkt $S \in [AB]$, $S \neq A, B$. Man sagt, S *teilt* $[AB]$ *im goldenen Schnitt*, falls gilt: $\frac{|AS|}{|BS|} = \frac{|AB|}{|AS|}$. Sei ferner $\mathcal{P} = [P_0...P_5]$ ein reguläres Fünfeck. Zeigen Sie:

1. Teilt S die Strecke $[AB]$ im goldenen Schnitt, so gilt

$$\frac{|AS|}{|BS|} \;=\; \frac{|AB|}{|AS|} \;=\; \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \;=:\; \Phi\,,$$

2. je zwei "Diagonalen", die sich nicht in einer Ecke von $\mathcal{P}$ schneiden, teilen einander im goldenen Schnitt: $\frac{|P_1P_3|}{|P_3S|} = \Phi$ (siehe Abbildung auf Rückseite).

3. das Verhältnis der Länge einer "Diagonalen" zur Länge einer Seite von $\mathcal{P}$ ist Φ, das heißt $\frac{|P_3P_5|}{|P_1P_2|} = \Phi$ (siehe Abbildung auf der Rückseite).

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede "Diagonale" parallel zur gegenüberliegenden Kante ist. Sei S der Schnittpunkt der zwei "Diagonalen" (siehe Abbildung auf der Rückseite). Benutzen Sie ohne Beweis den Strahlensatz, d.h. $\frac{|P_3P_5|}{|P_1P_2|} = \frac{|P_3S|}{|P_1S|}$ und zeigen Sie dann: $|P_3P_5| = |P_1P_3|$ und $|P_1P_2| = |P_4P_5| = |P_3S|$.

Zu Aufgabe 4: