Übungen Platonische und Archimedische Körper WS 2009/2010
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 5
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Dienstag, 17.11.2009, 14:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1: Zu zwei voneinander verschiedenen Punkten P und Q in $\mathbb{R}^3$ sei die Ebene $e \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$e := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (P-Q)^T x = \frac{||P||^2 - ||Q||^2}{2}\}.$$

Zeigen Sie, dass e die Mittelsenkrechte von $[PQ]$ ist.

Aufgabe 2: Es seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^3$ vier Punkte, die in keiner gemeinsamen Ebene in $\mathbb{R}^3$ enthalten sind. Zeigen Sie, dass es genau eine Kugel $S \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die alle diese Punkte enthält.

Hinweis: Betrachten Sie die Mittelsenkrechten zu $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ und $[P_1P_4]$. Sie erhalten drei Ebenen, die sich aufgrund der Voraussetzung an die vier Punkte in genau einem Punkt M schneiden – dem Mittelpunkt von S.

Aufgabe 3: Es sei $C \in \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) := 2 \cdot C - x$. Zeigen Sie, dass f die Punktspiegelung an C im Sinne von Definition 1.5.9 ist. Folgern Sie, dass die Komposition von drei Punktspiegelungen wieder eine Punktspiegelung ist. Welche Art von Kongruenzabbildung ist die Komposition von zwei Punktspiegelungen?

Aufgabe 4: Es seien $P \in \mathbb{R}^3$ und $Q \in \mathbb{R}^3$ zwei voneinander verschiedene Punkte und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von $[PQ]$. Zeigen Sie: Ist $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine beliebige Kongruenzabbildung, so ist $g \circ f \circ g^{-1}$ die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von $[g(P)g(Q)]$. Insbesondere bildet g die Mittelsenkrechte (bzw. den Mittelpunkt) von $[PQ]$ auf die Mittelsenkrechte (bzw. den Mittelpunkt) von $[g(P)g(Q)]$ ab.