Übungen Platonische und Archimedische Körper WS 2009/2010
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 7
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Dienstag, 01.12.2009, 14:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1: Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *konvex*, falls für $P, Q \in C$ stets $[PQ] \subseteq C$ gilt. Betrachten Sie zu gegebenen Punkten $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^3$ die Menge

$$C := \{\sum_{i=1}^{n} t_i P_i \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } t_1 + \ldots + t_n = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass C konvex ist und dass $C \subseteq C'$ gilt für jede konvexe Menge $C' \subseteq \mathbb{R}^3$, die alle Punkte $P_1, \ldots, P_n$ enthält. Man nennt C die *konvexe Hülle von* $\{P_1, \ldots, P_n\}$.

Aufgabe 2: Es sei $\Delta A_0 A_2 A_4$ ein gleichseitiges Dreieck und M sein Mittelpunkt (im Sinne des Mittelpunktes eines regulären Polygons). Zeigen Sie, dass $|A_0 A_2|^2 = 3|MA_0|^2$ gilt.

Hinweis: Ergänzen Sie wie in der Vorlesung das gegebene Dreieck zu einem regulären Sechseck $[A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6]$ mit Mittelpunkt M. Betrachten Sie den Mittelpunkt N der Strecke $[MA_1]$.

Aufgabe 3: Es sei $[A_0 A_1 A_2 A_3 A_4]$ ein Quadrat. Zeigen Sie, dass die Geraden durch A_0 und A_2 bzw. durch A_1 und A_3 senkrecht aufeinander stehen und dass ihr Schnittpunkt M von allen Punkten A_0, A_1, A_2, A_3 denselben Abstand hat.

Aufgabe 4: Es seien h und h' zwei voneinander verschiedene Halbgeraden in $\mathbb{R}^3$ mit demselben Anfangspunkt A. Zu $B \in h \setminus \{A\}$ sei $B' \in h'$ der eindeutig bestimmte Punkt mit $|AB| = |AB'|$. Zeigen Sie: Bezeichnet $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Mittelsenkrechtenebene e von $[BB']$, so gilt $f(h) = h'$ und $f(h') = h$. Bezeichnet $\tilde{h}$ eine beliebige in e enthaltene Halbgerade mit Anfangspunkt A, so sind die Winkel $\angle \tilde{h} h$ und $\angle \tilde{h} h'$ kongruent. Man nennt e die *Winkelhalbierendenebene von* $\angle hh'$.