1.4. Dimension

Definition 1.4.1. Sei X ein irreduzibler topologischer Raum. Die *Dimension von* X ist

$$\dim X \;:=\; \sup\big\{\,\ell \in \mathbb{N}_0 \colon \exists\, \emptyset \neq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_\ell = X \text{ mit } X_i \subset X \text{ abg. und irreduzibel}\,\big\}.$$

Ist $X \neq \emptyset$ ein noetherscher topologischer Raum, so ist die *Dimension von* X

$$\begin{aligned} \dim X \;&:=\; \sup\big\{\dim Y \colon Y \text{ ist irreduzible Komponente von } X\,\big\} \\ &=\; \sup\big\{\,\ell \in \mathbb{N}_0 \colon \exists\, \emptyset \neq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_\ell \subset X \text{ mit } X_i \subset X \text{ abg. und irreduzibel}\,\big\}. \end{aligned}$$

Ist die Dimension von X gleich 1, bzw. 2, so heißt X eine *Kurve*, bzw. *Fläche*.

Definition 1.4.2.

a) Sind $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \ldots \subsetneq I_\ell$ Primideale in einem Ring R, dann heißt $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \ldots \subsetneq I_\ell$ eine *Primidealkette der Länge* ℓ *in* R.

b) Ist I ein Ideal in einem Ring R, dann ist die *Dimension von* I, $\dim I$, das Supremum der Längen aller Primidealketten $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \ldots \subsetneq I_\ell$ in R mit $I \subset I_0$, d.h.

$$\dim I \;:=\; \sup\big\{\,\ell \in \mathbb{N}_0 \colon \exists\, I \subset I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \ldots \subsetneq I_\ell \text{ mit } I_i \subset R \text{ Primideale}\,\big\}.$$

c) Ist R ein Ring, so ist die *Dimension von* R, $\dim R$, das Supremum der Längen aller Primidealketten in R, d.h.

$$\dim R \;:=\; \sup\big\{\,\ell \in \mathbb{N}_0 \colon \exists\, I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \ldots \subsetneq I_\ell \text{ mit } I_i \subset R \text{ Primideale}\,\big\}.$$

Satz 1.4.3. *Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge und $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$. Dann gilt*

$$\dim X \;=\; \dim I(X) \;=\; \dim R\,.$$

Beweis. Setze $I := I(X)$. Die folgenden Ketten entsprechen sich eins zu eins:

1. $V_0 \subsetneq \ldots \subsetneq V_\ell \subset X$ — irreduzible algebraische Mengen in X,
2. $I_0 \supsetneq \ldots \supsetneq I_\ell \supset I(X)$ — Primideale in $k[x_1, \ldots, x_n]$, die $I(X)$ enthalten,
3. $\overline{I}_0 \supsetneq \ldots \supsetneq \overline{I}_\ell$ — Primideale in R.

unter den Zuordnungen

1. $\longleftrightarrow$ 2. $V_i \mapsto I(V_i)$ und $I_i \mapsto V(I_i)$, denn $V(I(V_i)) = V_i$ und $I(V(I_i)) = I_i$.

2. $\longleftrightarrow$ 3. Betrachte $\varphi : k[x_1, \ldots, x_n] \to R, \ker\varphi = I$ und die Zuordnungen $I_i \mapsto \varphi(I_i) = I_i/I$ für $I \subset I_i \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ und $\overline{I}_i \mapsto \varphi^{-1}(\overline{I}_i) \supset \ker\varphi = I$ für $\overline{I}_i \subset R$. Es gilt $I_i = \varphi^{-1}\varphi(I_i)$ und $\overline{I}_i = \varphi(\varphi^{-1}\overline{I}_i)$. □

Lokalisierung

Erinnerung. Zu einem Integritätsring R konstruiert man den Quotientenkörper

$$Q \;=\; \big\{\,(a,b) \in\; R \times (R \smallsetminus \{0\})\,\big\}/\sim \qquad \text{wobei}$$

$$(a,b) \sim (a',b') \quad :\Longleftrightarrow \quad ab' - a'b = 0 \quad \text{in } R\,.$$

Q entsteht durch Invertieren aller Elemente von $R \smallsetminus \{0\}$. Die Äquivalenzklasse von (a,b) wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet.

Definition 1.4.4. Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $U \subset R$ heißt *multiplikativ abgeschlossen*, falls gilt: $1 \in U$ und für alle $b, b' \in U$ ist auch $b\,b' \in U$.

Beispiele 1.4.5. a) Ist R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so ist $U := R \smallsetminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen.

b) Ist R ein Integritätsring, so ist (0) Primideal und $U = R \smallsetminus \{0\}$ multiplikativ abgeschlossen.

c) Ist R ein Ring und $b \in R$, so ist $U := \{1, b, b^2, b^3, \ldots\}$ multiplikativ abgeschlossen.

Definition 1.4.6. Sei R ein Ring und $U \subset R$ multiplikativ abgeschlossen.

a) Auf der Menge $R \times U$ definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$(a,b) \sim (a',b') \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, c \in U \text{ mit } \; c\cdot(ab' - a'b) = 0 \quad \text{in } R\,.$$

b) Die *Lokalisierung von R bei U* ist die Menge der Äquivalenzklassen

$$U^{-1}R \;:=\; \big\{(a,b) \in R \times U\big\}/\sim\;.$$

Die Äquivalenzklasse von $(a,b) \in R \times U$ wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet.

c) Mit der (wohldefinierten!) Addition und Multiplikation

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \;:=\; \frac{ab' + a'b}{bb'}\,, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \;:=\; \frac{aa'}{bb'}$$

wird $U^{-1}R$ zu einem Ring mit dem kanonischen Homomorphismus $\rho : R \to U^{-1}R, a \mapsto \frac{a}{1}$.

Beispiele 1.4.7. a) Sei R ein Integritätsring und $U = R \smallsetminus \{0\}$. Dann ist

$$(a,b) \sim (a',b') \iff \exists\, c \in U \text{ mit } \; c\cdot(ab' - a'b) = 0 \iff ab' - a'b = 0 \quad \text{in } R\,.$$

Somit ist $U^{-1}R = Q$ der Quotientenkörper.

b) Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und $U = R \smallsetminus \mathfrak{p}$. Dann heißt $R_\mathfrak{p} := U^{-1}R$ die *Lokalisierung von R bei* $\mathfrak{p}$. Alle Elemente von $U = R \smallsetminus \mathfrak{p}$ sind invertierbar in $R_\mathfrak{p}$. Der Ring $R_\mathfrak{p}$ besitzt ein einziges maximales Ideal, nämlich

$$U^{-1}\mathfrak{p} \;=\; \Big\{\, \frac{a}{b} \;:\; a \in \mathfrak{p}, b \in U \,\Big\} \;=\; \mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}\,.$$

c) Sei R ein Ring, $b \in R$ und $U = \{1, b, b^2, \ldots\}$. Dann heißt $R_b := U^{-1}R$ die *Lokalisierung von R bei b*. Alle Potenzen von b sind invertierbar in R_b. Es ist

$$R[x]/(bx-1) \xrightarrow{\;\sim\;} R_b\,, \quad x \mapsto \tfrac{1}{b} \qquad \text{ein Isomorphismus.}$$

d) Sei R ein Ring und $U \subset R$ multiplikativ abgeschlossen mit $0 \in U$. Dann ist $U^{-1}R = (0)$ der Nullring.

Satz 1.4.A (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung).
Sei R ein Ring und $U \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ mit $\varphi(U) \subset S^\times$ (Einheitengruppe) einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\widetilde{\varphi} : U^{-1}R \to S$ mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \rho$. Es gilt $\widetilde{\varphi}(\frac{a}{b}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\forall\,\varphi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & S \\
& U^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\widetilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Da $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \rho$ gelten soll, muss $\widetilde{\varphi}(\frac{a}{1}) = \varphi(a)$ sein und

$$\varphi(a) \;=\; \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{a}{1}\big) \;=\; \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{b}{1}\big) \;=\; \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{a}{b}\big) \cdot \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{b}{1}\big) \;=\; \widetilde{\varphi}\big(\tfrac{a}{b}\big) \cdot \varphi(b)\,.$$

Also muss $\widetilde{\varphi}(\frac{a}{b}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$ sein. Dies ist auch wohldefiniert, denn $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ bedeutet, es gibt ein $c \in U$ mit $c\cdot(ab' - a'b) = 0$. Somit gilt in S

$$\varphi(c)\cdot\big(\varphi(a)\varphi(b') - \varphi(a')\varphi(b)\big) = 0\,.$$

Und da $\varphi(b), \varphi(b'), \varphi(c)$ invertierbar in S sind, folgt $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a')\varphi(b')^{-1}$. Man rechnet nach, dass $\widetilde{\varphi}$ mit dieser Definition ein Homomorphismus $U^{-1}R \to S$ ist. $\square$

Proposition 1.4.B. *Sei R ein Ring, $U \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $\rho : R \to U^{-1}R$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ die kanonische Abbildung. Dann sind die Zuordnungen*

$$\begin{array}{rcl}
\big\{\, \mathfrak{p} \subset R \text{ Primideale mit } \mathfrak{p} \cap U = \emptyset \,\big\} & \longleftrightarrow & \big\{\, \mathfrak{P} \subset U^{-1}R \text{ Primideale} \big\} \\
\mathfrak{p} & \longmapsto & U^{-1}\mathfrak{p} := \{\frac{a}{b} \in U^{-1}R\colon a \in \mathfrak{p}, b \in U\} \;=\; \mathfrak{p}\cdot(U^{-1}R) \\
\rho^{-1}\mathfrak{P} & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{P}
\end{array}$$

bijektiv und invers zueinander. Beide Abbildungen sind verträglich mit (strikten) Inklusionen.

Bemerkung. Eine entsprechende Bijektion besteht auch zwischen allgemeinen Idealen. Siehe z.B. [D. Eisenbud: *Commutative Algebra*, Proposition 2.2] für einen elementaren Beweis. Um einen anderen Beweis zu geben benutzen wir folgendes

Lemma 1.4.C. *Sei R ein Ring. Dann sind die Primideale $\mathfrak{p} \subset R$ genau die Kerne von Homomorphismen $\varphi : R \to K$, wobei K ein Körper ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p} = \ker(\varphi : R \to K)$, so ist $\overline{\varphi} : R/\mathfrak{p} \hookrightarrow K$ injektiv und $R/\mathfrak{p}$ daher ein Integritätsring. Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so sei K der Quotientenkörper des Integritätsringes $R/\mathfrak{p}$ und $\varphi : R \to K$ die kanonische Abbildung. Dann ist $\mathfrak{p} = \ker\varphi$. $\square$

Beweis von Proposition 1.4.B.
„$\longleftarrow\!\shortmid$" Sei $\mathfrak{P} = \ker(\widetilde{\varphi} : U^{-1}R \to K)$ für einen Körper K. Dann ist $\rho^{-1}\mathfrak{P} = \ker(\widetilde{\varphi} \circ \rho : R \to K)$ ebenfalls ein Primideal.

„$\longmapsto$" Sei $\mathfrak{p} = \ker(\varphi : R \to K)$ für einen Körper K mit $\mathfrak{p} \cap U = \emptyset$. Dann ist $\varphi(U) \subset K \setminus \{0_K\} = K^\times$ und $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \rho$ für einen Homomorphismus $\widetilde{\varphi} : U^{-1}R \to K$ nach Satz 1.4.A. Damit ist $\ker\widetilde{\varphi} = U^{-1}\mathfrak{p}$ ebenfalls ein Primideal.

Nach Satz 1.4.A ist $\widetilde{\varphi} : U^{-1}R \to K$ der eindeutig bestimmte Homomorphismus, der $\varphi := \widetilde{\varphi} \circ \rho$ fortsetzt. Daraus folgt, dass beide Zuordnungen invers zueinander sind. Die Verträglichkeit mit (strikten) Inklusionen ist eine direkte Konsequenz. $\square$

Mit dem Lemma beweist man auch ganz leicht (und anders als üblich) folgende

Proposition 1.4.D. *Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal, sowie $\rho : R \to R/I$ der kanonische Epimorphismus. Dann sind die Zuordnungen*

$$\begin{array}{rcl}
\big\{\, \mathfrak{p} \subset R \text{ Primideale mit } I \subset \mathfrak{p} \,\big\} & \longleftrightarrow & \big\{\, \overline{\mathfrak{p}} \subset R/I \text{ Primideale} \big\} \\
\mathfrak{p} & \longmapsto & \overline{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/I \\
\rho^{-1}\overline{\mathfrak{p}} & \longleftarrow\!\shortmid & \overline{\mathfrak{p}}
\end{array}$$

bijektiv und invers zueinander. Beide Abbildungen sind verträglich mit (strikten) Inklusionen.

Beweis. „$\longmapsto$" Sei $\mathfrak{p} = \ker(\varphi : R \to K)$ für einen Körper K mit $I \subset \mathfrak{p}$. Wegen des Homomorphiesatzes existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\overline{\varphi} : R/I \to K$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \rho$. Damit ist $\ker \overline{\varphi} = \mathfrak{p}/I$ ebenfalls ein Primideal.

„$\longleftarrow$" Sei $\overline{\mathfrak{p}} = \ker(\overline{\varphi}\colon R/I \to K)$ für einen Körper K. Dann ist $\rho^{-1}\overline{\mathfrak{p}} = \ker(\overline{\varphi} \circ \rho\colon R \to K)$.

Da der Homomorphismus $\overline{\varphi} : R/I \to K$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \rho$ eindeutig bestimmt ist, folgt dass beide Zuordnungen invers zueinander sind. Die Verträglichkeit mit (strikten) Inklusionen ist eine direkte Konsequenz. □

Als Anwendung der Lokalisierung beweisen wir folgende

Proposition 1.4.8. *Seien R, S Ringe und $R \subset S$ endlich. Dann gilt:*

a) Going-up: *Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und $I \subset S$ ein Ideal mit $I \cap R \subset \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subset S$ mit $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ und $I \subset \mathfrak{q}$.*

b) Unvergleichbarkeit: *Seien $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \subset S$ Primideale mit $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}$. Gilt $\mathfrak{q}_1 \neq \mathfrak{q}_2$ dann ist $\mathfrak{q}_1 \not\subset \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_2 \not\subset \mathfrak{q}_1$.*

Beweis. a) Wir setzen $\overline{R} := R/(I \cap R) \subset S/I =: \overline{S}$. Dann ist $\overline{S}$ endlich über $\overline{R}$ und ferner $\overline{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/(I \cap R) \subset \overline{R}$ ein Primideal. Die Teilmenge $U := \overline{R} \smallsetminus \overline{\mathfrak{p}} \subset \overline{R} \subset \overline{S}$ ist multiplikativ abgeschlossen. Wir betrachten die Lokalisierungen $\overline{R}_{\overline{\mathfrak{p}}} = U^{-1}\overline{R} \subset U^{-1}\overline{S}$ nach U. Der Ring $\overline{R}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ besitzt $U^{-1}\overline{\mathfrak{p}}$ als einziges maximales Ideal.

Da $\overline{S}$ endlich über $\overline{R}$ ist, ist auch $U^{-1}\overline{S}$ endlich über $\overline{R}_{\overline{\mathfrak{p}}}$, denn ist etwa $\overline{S} = \overline{R}\, s_1 + \ldots + \overline{R}\, s_n$, so ist $U^{-1}\overline{S} = U^{-1}\overline{R}\, \frac{s_1}{1} + \ldots U^{-1}\overline{R}\, \frac{s_n}{1}$.

Sei nun $\mathfrak{q}' \subset U^{-1}\overline{S}$ ein maximales Ideal. Wegen Korollar 1.2.15 ist auch $\mathfrak{q}' \cap \overline{R}_{\overline{\mathfrak{p}}} \subset \overline{R}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ ein maximales Ideal, also $\mathfrak{q}' \cap \overline{R}_{\overline{\mathfrak{p}}} = U^{-1}\overline{\mathfrak{p}}$. Sei $\mathfrak{q}$ das Urbild von $\mathfrak{q}'$ bezüglich des Homomorphismus $S \to U^{-1}\overline{S}$

$$\begin{array}{ccccccc} S & \twoheadrightarrow & \overline{S} & \longrightarrow & U^{-1}\overline{S} & \supset & \mathfrak{q}' \\ \cup & & \cup & & \cup & & | \\ R & \twoheadrightarrow & \overline{R} & \longrightarrow & \overline{R}_{\overline{\mathfrak{p}}} & \supset & U^{-1}\overline{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Dann ist $\mathfrak{q} \subset S$ ein Primideal mit $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ und $I \subset \mathfrak{q}$. Dies beweist a).

b) Annahme: $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$.
Wir betrachten die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $U := R \smallsetminus \mathfrak{p} \subset R \subset S$. Wie in a) ist $R_{\mathfrak{p}} = U^{-1}R \subset U^{-1}S$ endlich. Nach Proposition 1.4.B sind $U^{-1}\mathfrak{q}_1 \subsetneq U^{-1}\mathfrak{q}_2 \subset U^{-1}S$ verschiedene Primideale. Es gilt $U^{-1}\mathfrak{q}_1 \cap R_{\mathfrak{p}} = U^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$, denn „$\supset$" wegen $\mathfrak{q}_1 \supset R \cap \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}$ und „$\subset$" weil $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$ ein maximales Ideal ist.

Somit ist $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$ ein Körper und die Inklusion von Integritätsringen $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}} \subset U^{-1}S/U^{-1}\mathfrak{q}_1$ endlich. Nach Lemma 1.2.13 ist daher auch $U^{-1}S/U^{-1}\mathfrak{q}_1$ ein Körper. Doch dies kann nicht sein, da das nicht-triviale Ideal $U^{-1}\mathfrak{q}_2/U^{-1}\mathfrak{q}_1$ darin enthalten ist. Aufgrund dieses Widerspruchs muss die Annahme falsch gewesen sein und $\mathfrak{q}_1 \not\subset \mathfrak{q}_2$ gelten. Genauso zeigt man $\mathfrak{q}_1 \not\supset \mathfrak{q}_2$. □

Satz 1.4.9. *Seien R, S Ringe und $R \subset S$ endlich. Dann ist* $\dim R = \dim S$.

Beweis. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Primidealkette in R. Aufgrund von „Going-up" (Satz 1.4.4 a) finden wir eine Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ in S mit $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$. Daraus folgt $\dim S \geq \dim R$.

Sei umgekehrt $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ eine Primidealkette in S. Aufgrund der „Unvergleichbarkeit" (Satz 1.4.4 b) hat die Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \cap R \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_n \cap R$ in R die Länge n. Daraus folgt die Ungleichung $\dim R \geq \dim S$. □

Satz 1.4.10. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt* $\quad \dim \mathbb{A}^n \;=\; \dim k[x_1, \ldots, x_n] \;=\; n.$

Beweis. Die erste Gleichheit folgt aus Satz 1.4.3, die zweite mit Induktion nach n:

$n = 0$. Dann ist $(0) \subset k$ das einzige Primideal und die Dimension ist 0.

$n = 1$. Da $k[x]$ ein Hauptidealring ist, ist jedes Primideal $\neq (0)$ bereits maximal. Die Primidealketten maximaler Länge sind also von der Form $(0) \subsetneq \mathfrak{m}$ und die Dimension ist 1.

$n \geq 1$. Die Primidealkette $(0) \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \ldots \subsetneq (x_1, \ldots, x_n)$ in $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat die Länge n. Somit ist die Dimension mindestens n.

Sei andererseits $(0) \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ eine Primidealkette in $T := k[x_1, \ldots, x_n]$. Dann müssen wir zeigen, dass $m \leq n$ ist. Sei $f \in \mathfrak{p}_1$ mit $f \neq 0$ ein nicht-konstantes Polynom. Wegen Lemma 1.2.12 gibt es Elemente $x'_1, \ldots, x'_{n-1} \in T$, so dass der Ring $T/(f)$ endlich ist über dem Unterring $R = k[x'_1, \ldots, x_{n-1}] \subset T/(f)$. Die Primidealkette in $T/(f)$

$$\mathfrak{p}_1/(f) \ \subsetneq \ \ldots \ \subsetneq \ \mathfrak{p}_m/(f)$$

hat die Länge $m-1$. Die Induktionshypothese besagt nun $\dim k[x'_1, \ldots, x'_{n-1}] = n-1$ und wegen Satz 1.4.9 ergibt sich $m - 1 \leq \dim T/(F) = \dim k[x'_1, \ldots, x'_{n-1}] = n - 1$ wie gewünscht. $\square$

Korollar 1.4.11. *Ist $X \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge, dann gilt $\dim X \leq n$ und es ist $\dim X = n$ genau dann, wenn $X = \mathbb{A}^n$ ist.*

Beweis. Sei $V_0 \subsetneq \ldots \subsetneq V_\ell \subset X$ eine Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X. Da $X \subset \mathbb{A}^n$ abgeschlossen ist, sind auch die V_i in $\mathbb{A}^n$ abgeschlossen. Wegen $\dim \mathbb{A}^n = n$ folgt $\ell \leq n$ und als Supremum aller solcher ℓ ist $\dim X \leq n$.

Ist $\dim X = n$, so gibt es eine Kette $V_0 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n \subset X \subset \mathbb{A}^n$ von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen V_i von $\mathbb{A}^n$. Es muss nun gelten, $V_n = X = \mathbb{A}^n$, da im Fall $V_n \subsetneq \mathbb{A}^n$ die Kette $V_0 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n \subsetneq V_{n+1} := \mathbb{A}^n$ Länge $n + 1$ hätte und $\dim \mathbb{A}^n \geq n + 1$ wäre. $\square$