2.F. Kategorien und Funktoren

Definition 2.F.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus *Objekten* $X, Y, \ldots$ und zu je zwei Objekten X, Y einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* (Pfeilen) $X \xrightarrow{f} Y$, sowie einer *Verknüpfungsvorschrift*

$$\begin{array}{rccc} \circ: & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ & \left(X \xrightarrow{f} Y \;,\; Y \xrightarrow{g} Z \right) & \longmapsto & X \xrightarrow{g\circ f} Z \;, \end{array}$$

so dass folgende Bedingungen gelten:

(C1) *Assoziativität* der Verknüpfung:
Wann immer man Morphismen $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ für beliebige Objekte W, X, Y, Z betrachtet, so gilt $h \circ (g \circ f) \;=\; (h \circ g) \circ f$.

(C2) Für jedes Objekt X existiert ein *Identitäts-Morphismus* $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$, so dass für alle Morphismen $X \xrightarrow{g} Y$ gilt $g \circ \mathrm{id}_X = g$ und für alle Morphismen $W \xrightarrow{f} X$ gilt $\mathrm{id}_X \circ f = f$.

Definition 2.F.2. Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ heißt *Isomorphismus*, falls ein Morphismus $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Dann heißen X und Y isomorph in $\mathcal{C}$ und man schreibt $X \cong_{\mathcal{C}} Y$.

Beispiele 2.F.3.

1. Die Kategorie (aff Var$/k$) der *affinen Varietäten über* k hat als
   Objekte: alle affinen Varietäten $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und als
   Morphismen: alle polynomialen Abbildungen $f : X \to Y$.

2. Die Kategorie (ee int k-Alg) der *endlich erzeugten, integren k-Algebren* hat als
   Objekte: alle endlich erzeugten k-Algebren, welche Integritätsringe sind und als
   Morphismen: alle k-Homomorphismen $\alpha : A \to B$, d.h. α ist ein Ringhomomorphismus mit $\alpha|_k = \mathrm{id}_k$.

3. Die Kategorie (k-VR) der k-Vektorräume hat als
   Objekte: alle k-Vektorräume und als
   Morphismen: alle k-linearen Abbildungen.

4. Die Kategorie (k-Matr) der k-Matrizen hat als
   Objekte: die k-Vektorräume k^n für $n \in \mathbb{N}_0$ und als
   Morphismen: $\mathrm{Mor}_{(k\text{-Matr})}(k^n, k^m) := k^{m\times n}$ die Menge der Matrizen mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung und den Einheitsmatrizen als den Identitätsmorphismen.

5. Die Kategorie (komm Ringe) der kommutativen Ringe hat als
   Objekte: alle kommutativen Ringe R mit Eins und als
   Morphismen: $\mathrm{Hom}(R, S)$ alle Ringhomomorphismen.

6. Die Kategorie (Gp) der Gruppen hat als
   Objekte: alle Gruppen und als
   Morphismen: alle Gruppenhomomorphismen.

7. Die Kategorie (Mengen) der Mengen hat als
   Objekte: alle Mengen und als
   Morphismen: alle Abbildungen zwischen Mengen.

Definition 2.F.4. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ Kategorien. Ein *kovarianter Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ist eine Vorschrift, die

1. jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(X)$ von $\mathcal{C}'$ und
2. jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ einen Morphismus $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}\big(F(X), F(Y)\big)$

zuordnet, so dass gilt

(a) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle Objekte X von $\mathcal{C}$ und

(b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ und beliebige Objekte X, Y, Z von $\mathcal{C}$.

Fordert man in 2. stattdessen $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}\big(F(Y), F(X)\big)$ und in b) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, so heißt F ein *kontravarianter Funktor* (d.h. F dreht die Richtungen der Pfeile um).

Definition 2.F.5. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ein (z.B. kovarianter) Funktor. Falls für alle Objekte X, Y von $\mathcal{C}$ die Abbildung $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}\big(F(X), F(Y)\big), f \mapsto F(f)$

a) surjektiv ist, so heißt F *voll*,

b) injektiv ist, so heißt F *treu*,

c) bijektiv ist, so heißt F *voll treu*.

Falls für jedes Objekt X' von $\mathcal{C}'$ ein Objekt X von $\mathcal{C}$ existiert mit $F(X) \cong_{\mathcal{C}'} X'$, so heißt F *essenziell surjektiv*.

Beispiele 2.F.6.

1. Der Funktor $A : (\text{aff Var}/k) \longrightarrow (\text{ee int } k\text{-Alg})$, welcher die Varietät X auf die k-Algebra $A(X)$, und den Morphismus $f : X \to Y$ auf $A(f) := f^* : A(Y) \to A(X)$ abbildet, ist ein *kontravarianter*, voll treuer Funktor (Satz 2.3.4).

2. Die Vorschrift (k-Matr) $\longrightarrow$ (k-VR), welche dem Objekt k^n von (k-Matr) den k-Vektorraum k^n zuordnet und einem Morphismus $A \in k^{m \times n} = \mathrm{Mor}_{(k\text{-Matr})}(k^n, k^m)$ die lineare Abbildung $k^n \to k^m, x \mapsto Ax$ zuordnet, ist ein *kovarianter*, voll treuer Funktor.

3. Der *Identitäts-Funktor* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ auf einer Kategorie $\mathcal{C}$ erfüllt $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ für alle Objekte X von $\mathcal{C}$ und $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ für alle Morphismen f in $\mathcal{C}$. Er ist kovariant und voll treu.

4. Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ und $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ Funktoren, so ist auch $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$ ein Funktor. Dieser ist kovariant, falls F und G beide kovariant, oder beide kontravariant sind. Er ist kontravariant, falls F oder G kovariant und der andere kontravariant ist.

5. Der *Vergiss-Funktor* F : (Gp) $\longrightarrow$ (Mengen), welcher jeder Gruppe $(G, \cdot)$ die zugrundeliegende Menge G und jedem Gruppenhomomorphismus $f : (G, \cdot) \to (H, \cdot)$ die Abbildung $f : G \to H$ als Abbildung zwischen Mengen zuordnet, ist ein kovarianter, treuer, aber nicht voller Funktor (nicht jede Abbildung $G \to H$ ist ein Gruppenhomomorphismus).

6. Der *Vergiss-Funktor* F : (ee int k-Alg) $\longrightarrow$ (Ringe), welcher jeder endlich erzeugten k-Algebra A den Ring A zuordnet und jeden k-Homomorphismus $\alpha : A \to B$ einfach als Ringhomomorphismus betrachtet, ist ein kovarianter, treuer Funktor. Er ist genau dann voll, wenn $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p ist (denn dann ist automatisch $\alpha|_k = \mathrm{id}_k$, weil id_k der einzige Endomorphismus von k ist).

Funktoren sind also sozusagen „Abbildungen“ zwischen Kategorien. Um zu sagen, wann eine solche „Abbildung“ „umkehrbar“ ist (genauer „umkehrbar bis auf Isomorphie“) benötigen wir folgende

Definition 2.F.7.

1. Seien $F_1, F_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ zwei kontravariante Funktoren zwischen den Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$. Eine *natürliche Transformation τ von F_1 zu F_2* ist eine Vorschrift, die jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ einen Morphismus
$$F_1(X) \xrightarrow{\tau_X} F_2(X) \quad \in \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}\big(F_1(X), F_2(X)\big)$$
zuordnet, so dass für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$ das folgende Diagramm kommutiert
$$\begin{tikzcd} F_1(Y) \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(Y) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(X) \arrow[r, "\tau_X"] & F_2(X) \end{tikzcd}$$
τ heißt ein *natürlicher Isomorphismus von F_1 zu F_2*, falls für jedes Objekt der Morphismus τ_X ein Isomorphismus in $\mathcal{C}'$ ist. Man macht die analoge Definition für kovariante Funktoren.

2. Zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ heißen *äquivalent* (bzw. *anti-äquivalent*), falls es zwei kovariante (bzw. kontravariante) Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ und $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ gibt, sowie zwei natürliche Isomorphismen τ zwischen $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $G \circ F$ und τ' zwischen $\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$ und $F \circ G$. Das Tupel (F, G, τ, τ') heißt dann eine *(Anti-)Äquivalenz* zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$.

(Anti-)äquivalente Kategorien verhalten sich gleich bezüglich aller Fragen, die sich mit Morphismen zwischen Objekten und mit Diagrammen formulieren lassen, wie z.B. Injektivität, Surjektivität, Bijektivität von Vektorraum-Homomorphismen. Darin liegt die Bedeutung von Äquivalenzen von Kategorien. Äquivalenzen von Kategorien kann man auch auf folgende Weise beschreiben.

Satz 2.F.8. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ zwei Kategorien, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ sind (anti-)äquivalent.
2. Es gibt einen voll treuen, essenziell surjektiven, kovarianten (bzw. kontravarianten) Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall von Anti-äquivalenz.
$1 \Rightarrow 2$. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ und $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, sowie τ und τ' eine Anti-äquivalenz zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$. Um zu zeigen, dass der Funktor F essenziell surjektiv ist, betrachten wir zu jedem Objekt X' von $\mathcal{C}'$ das Objekt $X := G(X')$ von $\mathcal{C}$. Dann haben wir in der Kategorie $\mathcal{C}'$ den Isomorphismus $\tau'_{X'} : X' = \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}(X') \xrightarrow{\sim} F \circ G(X') = F(X)$. Dass F voll treu ist sieht man daraus, dass
$$F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}\big(F(Y), F(X)\big) \ , \ \ f \mapsto F(f)$$
die Umkehrabbildung $f' \mapsto \tau_Y^{-1} \circ G(f') \circ \tau_X$ besitzt.

$2 \Rightarrow 1$. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ein voll treuer, essenziell surjektiver, kontravarianter Funktor. Wir müssen den umgekehrten Funktor G konstruieren. Sei dazu X' ein Objekt in $\mathcal{C}'$. Da F essenziell surjektiv ist, existiert ein Objekt X in $\mathcal{C}$ und ein Isomorphismus $\tau'_{X'} : X' \xrightarrow{\sim} F(X)$. Wir setzen $G(X') := X$. Ist $f' : Y' \to X'$ ein Morphismus in $\mathcal{C}'$, so betrachte das Diagramm
$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}(Y') = Y' \arrow[r, "\sim\ \tau'_{Y'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}(f') = f'"'] & F(G(Y')) \arrow[d, dashed, "\tau'_{X'} \circ f' \circ (\tau'_{Y'})^{-1} =: F(G(f'))"] \\ \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}(X') = X' \arrow[r, "\sim\ \tau'_{X'}"] & F(G(X')) \end{tikzcd} \tag{1}$$

Da F voll treu und kontravariant ist, ist $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\big(G(X'), G(Y')\big) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}\big(F(G(Y')), F(G(X'))\big)$ bijektiv. Somit existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $f : G(X') \to G(Y')$ in $\mathcal{C}$ mit $F(f) = \tau'_{X'} \circ f' \circ (\tau'_{Y'})^{-1}$. Wir setzen $G(f') := f$. Dann ist auch G ein kontravarianter Funktor. Und nach Konstruktion ist τ' ein natürlicher Isomorphismus zwischen $\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$ und $F \circ G$.

Um τ zu konstruieren betrachte man ein Objekt X in $\mathcal{C}$ und den zu $F(X)$ gehörenden Isomorphismus $(\tau'_{F(X)})^{-1} : F(G(F(X))) \xrightarrow{\sim} F(X)$ in $\mathcal{C}'$. Da

$$F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\big(X, G(F(X))\big) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}\big(F(G(F(X))), F(X)\big)$$

bijektiv ist, existiert ein Isomorphismus $\tau_X := F^{-1}\big((\tau'_{F(X)})^{-1}\big) : X \xrightarrow{\sim} G(F(X))$ in $\mathcal{C}$. Setzt man in dem Diagramm (1) $X' := F(X), Y' := F(Y)$, und $f' := F(f) : Y' \to X'$ für einen Morphismus $f : X \to Y$, so erhält man

$$\begin{tikzcd}
F(Y) \arrow[r, "\sim\ F(\tau_Y^{-1})"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(G(F(Y))) \arrow[d, "F\big(G(F(f))\big) = F\big(\tau_Y \circ f \circ (\tau_X)^{-1}\big)"] \\
F(X) \arrow[r, "\sim\ F(\tau_X^{-1})"] & F(G(F(X)))
\end{tikzcd}$$

Wegen der Bijektivität von F auf Morphismen folgt daraus $(G \circ F)(f) \circ \tau_X = \tau_Y \circ \mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f)$. Dies bedeutet, dass τ ein natürlicher Isomorphismus zwischen $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $G \circ F$ ist. Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ vermöge F und G anti-äquivalent sind. $\square$

Beispiele 2.F.9. Der Funktor $A : (\text{aff Var}/k) \longrightarrow (\text{ee int } k\text{-Alg})$ liefert eine Antiäquivalenz von Kategorien (Satz 2.3.4).

Beweis. Um die *essenzielle Surjektivität* zu zeigen, sei R eine endlich erzeugte, integre k-Algebra. Endliche Erzeugtheit bedeutet, dass es endlich viele Elemente $r_1, \dots, r_n \in R$ gibt, die R als Ring über k erzeugen. Betrachtet man den k-Homomorphismus

$$\alpha : k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow R\,, \quad x_i \mapsto r_i\,,$$

so bedeutet dies, dass α surjektiv ist. Sei $I = \ker \alpha \subset k[x_1, \dots, x_n]$. Da R ein Integritätsring ist, ist I ein Primideal. Wir nehmen $X := \mathrm{V}(I) \subset \mathbb{A}^n$. Es gilt $I(X) = \mathrm{Rad}(I) = I$, da Primideale schon Radikalideale sind. Daher ist X eine affine Varietät über k und mithilfe des Homomorphiesatzes induziert α einen Isomorphismus $A(X) = k[x_1, \dots, x_n]/I(X) \xrightarrow{\sim} R$ in (ee int k-Alg).

Dass A *voll treu* ist, wurde in Satz 2.3.4 (b) gezeigt. $\square$

Beispiele 2.F.10. Der Funktor (k-Matr) $\longrightarrow$ (k-VR) von 2.F.6/2 liefert keine Äquivalenz von Kategorien, da es unendlich dimensionale k-Vektorräume gibt, die nicht isomorph zu einem k^n sind.

Aber der Funktor (k-Matr) $\longrightarrow$ (endl dim k-VR) in die Kategorie der endlich dimensionalen k-Vektorräume, der genauso definiert ist, liefert eine Äquivalenz von Kategorien. Er ist essenziell surjektiv, da jeder endlich dimensionale k-Vektorraum isomorph zu einem k^n ist. Und da unter diesen Isomorphismen k-lineare Abbildungen bijektiv den Matrizen entsprechen, ist der Funktor voll treu.