Die Noether-Normalisierung

Definition 1.2.9. Ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ heißt *endlich*, falls es endlich viele Elemente $s_1, \ldots, s_n \in S$ gibt mit $S = R\, s_1 + \ldots + R\, s_n$, d.h. für alle $s \in S$ existieren $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit $s = \sum_{i=1}^n \varphi(r_i) \cdot s_i$. Der Ring S heißt dann *endlich über* R und die Menge $\{s_1, \ldots, s_n\}$ heißt ein *Erzeugendensystem von* S *über* R.

Folgerung 1.2.10. (a) Ist $\varphi : R \to S$ endlich und $I \subset S$ ein Ideal, so ist $\overline{\varphi} : R/\varphi^{-1}I \to S/I$ endlich und injektiv.
(b) Ist $\varphi : R \to S$ surjektiv, so ist φ endlich mit $\{1_S\}$ als Erzeugendensystem.
(c) Sind $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ endlich, so ist auch $\psi \circ \varphi : R \to T$ endlich.

Satz 1.2.11 (Noether-Normalisierung). *Sei k ein Körper, $I \subsetneq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal und $S = k[x_1, \ldots, x_n]/I$. Dann gibt es einen Polynomring $R = k[y_1, \ldots, y_d] \subset S$ mit $d \leq n$, so dass S endlich über R ist. Falls $\#k = \infty$ (z.B. wenn k algebraisch abgeschlossen ist), so können die y_j als Linearkombinationen der x_i gewählt werden, $y_j = \sum b_{ij} x_i$ mit $b_{ij} \in k$.*

Wir beweisen den Satz mithilfe des folgenden Lemmas. Wir formulieren und beweisen dieses Lemma nur für $\#k = \infty$.
Für $\#k < \infty$ siehe [D. Eisenbud: *Commutative Algebra*, Lemma 13.2 und Theorem 13.3].

Lemma 1.2.12. *Sei k ein Körper mit $\#k = \infty$ und $f \in T = k[x_1, \ldots, x_n]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann gibt es Elemente $a_i \in k$, so dass der Ringhomomorphismus*

$$\varphi : \; k[x'_1, \ldots, x'_{n-1}] \;\longrightarrow\; T/(f)\,, \;\; x'_i \;\mapsto\; x_i - a_i x_n$$

injektiv und endlich ist.

Beweis. Sei $f = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_n} c_{i_1 \ldots i_n}\, x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$ vom Grad $\deg f := \max\{i_1 + \ldots + i_n : c_{i_1 \ldots i_n} \neq 0\} = d$ und

$$f_j := \sum_{i_1 + \ldots + i_n = j} c_{i_1 \ldots i_n}\, x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

der *homogene Bestandteil* von f vom Grad j. So ist $f = f_d + f_{d-1} + \ldots + f_1 + f_0$. Wir setzen $x'_i = x_i - a_i x_n$ für $a_i \in k$ und erhalten

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i_1, \ldots, i_n} c_{i_1 \ldots i_n} (x'_1 + a_1 x_n)^{i_1} \cdot \ldots \cdot (x'_{n-1} + a_{n-1} x_n)^{i_{n-1}} \cdot x_n^{i_n} \\ &= x_n^d \Big(\sum_{i_1 + \ldots + i_n = d} c_{i_1 \ldots i_n} a_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^{i_{n-1}} \cdot 1^{i_n} \Big) + \text{Terme kleineren Grades in } x_n \\ &= x_n^d \cdot f_d(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1) + \text{Terme kleineren Grades in } x_n\,. \end{aligned}$$

Da $f_d \neq 0$ und $\#k = \infty$, können wir die $a_i \in k$ so wählen, dass $f_d(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1) =: b \neq 0, b \in k$ ist. Wir erhalten

$$f \;=\; b\, x_n^d + \sum_{j=0}^{d-1} g_j(x'_1, \ldots, x'_{n-1}) x_n^j$$

und in $T/(f)$ ist damit

$$x_n^d \;=\; -b^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{d-1} g_j(x'_1, \ldots, x'_{n-1}) x_n^j\,.$$

Somit ist $\{1, x_n, \ldots, x_n^{d-1}\}$ ein endliches Erzeugendensystem für $T/(f)$ über $k[x'_1, \ldots, x'_{n-1}]$. $\square$

Beweis der Noether-Normalisierung (1.2.11). Induktion nach n.

$n = 0$. Dann ist $S = k/(0) = k$ und wir setzen $R = k = S$, $d = 0 \leq n$.

$n > 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle.
Falls $I = (0)$ ist, so ist $R = S$ ein Polynomring und S endlich über R. Wir haben $y_i = x_i$ und $d = n$.

Falls $I \neq (0)$ ist, so gibt es ein nicht-konstantes Polynom $f \in I \subset T = k[x_1, \dots, x_n]$. Wegen Lemma 1.2.12 existieren $a_i \in k$, so dass der injektive Ringhomomorphismus

$$\varphi : k[x'_1, \dots, x'_{n-1}] \longrightarrow k[x_1, \dots, x_n]/(f)$$

endlich ist. Betrachte das Ideal $\overline{I} := I/(f) \subset k[x_1, \dots, x_n]/(f)$. Nach dem 2. Isomorphiesatz ist $k[x_1, \dots, x_n]/(f) \Big/ I/(f) = k[x_1, \dots, x_n]/I = S$. Nach 1.2.10 (a) ist $k[x'_1, \dots, x'_{n-1}]/\varphi^{-1}\overline{I} \subset S$ endlich. Nach Induktionshypothese existiert nun ein Polynomring

$$R \;=\; k[y_1, \dots, y_d] \;\subset\; k[x'_1, \dots, x'_{n-1}]/\varphi^{-1}\overline{I} \;\subset\; S$$

mit $d \leq n-1$ und $y_j = \sum_i b_{ij} x'_i = \sum_i b_{ij}(x_i - a_i x_n)$ Linearkombination, so dass S endlich über R ist. □

Unser Ziel ist es, die Noether-Normalisierung zum Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes zu verwenden. Dazu benötigen wir zunächst ein weiteres Lemma.

Lemma 1.2.13. *Seien $R \subset S$ Integritätsbereiche und S endlich über R. So ist R genau dann ein Körper, wenn S ein Körper ist.*

Beweis. Sei R ein Körper und S somit ein endlich dimensionaler R-Vektorraum. Sei $a \in S, a \neq 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\{1, a, \dots, a^n\}$ linear abhängig über R ist, d.h. es existieren $b_n, \dots, b_0 \in R$ mit

$$b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \ldots + b_1 a + b_0 = 0 \qquad \text{in } S\,.$$

Sei $0 \leq d < n$, so dass $b_0 = \ldots = b_{d-1} = 0$ und $b_d \neq 0$. Da S ein Integritätsbereich ist, folgt

$$a \cdot \big(b_n a^{n-d-1} + b_{n-1} a^{n-d-2} + \ldots + b_{d+1}\big)/(-b_d) = 1\,.$$

Somit ist $a^{-1} \in S$ und S ein Körper.

Sei umgekehrt S ein Körper, $S = R\,s_1 + \ldots + R\,s_n$ für $s_i \in S, s_i \neq 0$, und $c \in R, c \neq 0$. Dann ist $x := c^{-1} \in S$ und $x\,s_j \in S$ für alle j. Deshalb existieren $b_{ij} \in R$ mit $x\,s_j = \sum_i b_{ij} s_i$. Setzt man $B := (b_{ij})_{i,j} \in R^{n \times n}$, so besitzt das lineare Gleichungssystem

$$(x \cdot \mathrm{Id}_n - B) \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \;=\; 0$$

die nicht-triviale Lösung $(s_1, \dots, s_n) \in S$ und es gilt daher in S

$$0 \;=\; \det(x \cdot \mathrm{Id}_n - B) \;=\; x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0$$

mit $d_{n-1}, \dots, d_0 \in R$. Setzen wir wieder $x = c^{-1}$ und multiplizieren mit c^{n-1}, so folgt

$$c^{-1} = -d_{n-1} - \ldots - d_1 c^{n-2} - d_0 c^{n-1} \in R\,.$$

Somit ist R ein Körper. □

Korollar 1.2.14. *Sei k ein Körper und $\mathfrak{m} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ein maximales Ideal, sowie $L = k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$. Dann ist $k \subset L$ eine endliche Körpererweiterung.*

Beweis. Wegen der Noether-Normalisierung gibt es einen Polynomring $R = k[y_1, \dots, y_d] \subset L$, so dass L endlich über R ist. Aufgrund von Lemma 1.2.13 ist dann R ein Körper. Dies ist aber nur möglich, wenn $d = 0$ und $R = k$ ist. Also ist L endlich über k. □

Daraus folgt nun der noch fehlende Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes:

Satz 1.2.6. (a) *Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ von der Form $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ für geeignete $a_i \in k$.*

Beweis. Nach Korollar 1.2.14 ist die Körpererweiterung $L = k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \supset k$ endlich und damit algebraisch. Da k algebraisch abgeschlossen ist, ist $L = k$. Es gibt somit Elemente $a_i \in k$ mit $a_i = \overline{x}_i$ in L. Dies bedeutet, dass $x_i - a_i \in \mathfrak{m}$ für alle i. Da $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ selbst schon ein maximales Ideal ist und in $\mathfrak{m}$ enthalten, folgt $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. □

Korollar 1.2.15. *Sei $R \subset S$ endlich und $\mathfrak{m} \subset S$ ein maximales Ideal. Dann ist $\mathfrak{m} \cap R \subset R$ ebenfalls ein maximales Ideal.*

Beweis. Das Urbild von $\mathfrak{m}$ unter der Inklusionsabbildung $R \subset S$ ist $\mathfrak{m} \cap R$. Somit ist $R/(\mathfrak{m} \cap R) \subset S/\mathfrak{m}$ endlich und $R/(\mathfrak{m} \cap R)$ und $S/\mathfrak{m}$ sind Integritätsbereiche. Da $S/\mathfrak{m}$ ein Körper ist, folgt aus Lemma 1.2.13, dass auch $R/(\mathfrak{m} \cap R)$ ein Körper, also $\mathfrak{m} \cap R \subset R$ ein maximales Ideal ist. □