Produkte von affinen Varietäten.

Proposition 2.3.9. *Das Tensorprodukt von R-Algebren hat folgende Eigenschaften:*

(a) $R \otimes_R R'' = R''$.

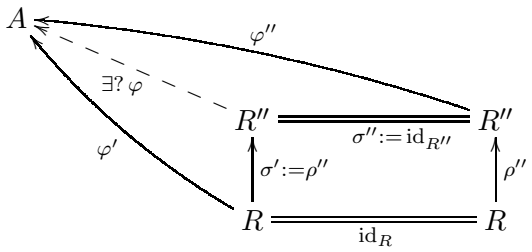
(b) $R' \otimes_R R'' \xrightarrow{\sim} R'' \otimes_R R'$, $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ *ist ein Isomorphismus von R-Algebren.*

(c) $R[x_1, \ldots, x_n] \otimes_R R'' = R''[x_1, \ldots, x_n]$.

(d) Ist $I \subset R'$ *ein Ideal, so ist* $(R'/I) \otimes_R R'' = (R' \otimes_R R'')/I \cdot (R' \otimes_R R'')$.

(e) Ist $f : R' \to \widetilde{R}'$ *ein Homomorphismus von R-Algebren, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus von R''-Algebren* $R' \otimes_R R'' \to \widetilde{R}' \otimes_R R''$, $x \otimes y \mapsto f(x) \otimes y$. *Dieser wird mit* $f \otimes \mathrm{id}_{R''}$ *bezeichnet.*

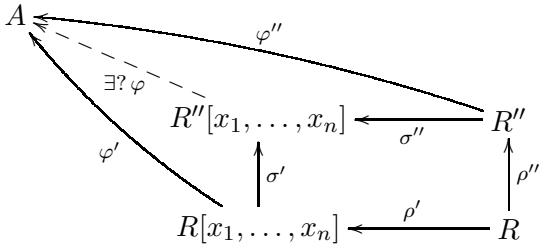
Beweis. (a) Gegeben sei eine R-Algebra A und Homomorphismen von R-Algebren $\varphi' : R \to A$, $\varphi'' : R'' \to A$ wie in folgendem Diagramm



mit $\varphi' \circ \mathrm{id}_R = \varphi'' \circ \rho''$. Dann ist $\varphi := \varphi'' : R'' \to A$ der eindeutig bestimmte Homomorphismus mit $\varphi \circ \sigma' = \varphi'' \circ \rho'' = \varphi'$ und $\varphi \circ \sigma'' = \varphi'' \circ \mathrm{id}_{R''} = \varphi''$. Die Eindeutigkeit von φ folgt aus dieser letzten Gleichung. Somit besitzt R'' die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, und es gilt $R'' = R \otimes_R R''$.

(b) Wir geben nur die Umkehrabbildung an: $x \otimes y \leftarrow\!\shortmid y \otimes x$.

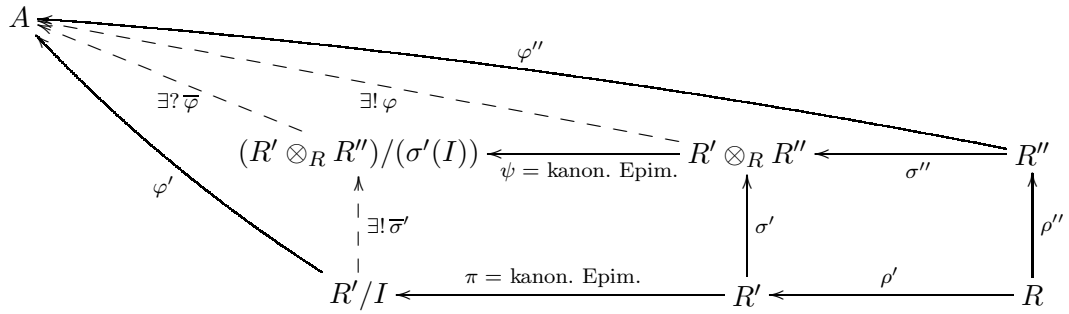
(c) Gegeben sei eine R-Algebra A und Homomorphismen von R-Algebren $\varphi' : R[x_1, \ldots, x_n] \to A$, $\varphi'' : R'' \to A$ wie in folgendem Diagramm



mit $\varphi' \circ \rho' = \varphi'' \circ \rho''$, sowie $\sigma'(x_i) = x_i$ und $\sigma'|_R = \sigma'' \circ \rho''$. Sei $a_i := \varphi'(x_i) \in A$. Durch die a_i und die Struktur von A als R-Algebra mittels $\varphi' \circ \rho' : R \to A$ ist dann φ' eindeutig bestimmt aufgrund der universellen Eigenschaft des Polynomrings.

Wir definieren $\varphi : R''[x_1, \ldots, x_n] \to A$ durch $\varphi|_{R''} = \varphi''$ (d.h. $\varphi \circ \sigma'' = \varphi''$) und $\varphi(x_i) = a_i$. Letzeres muss so sein wegen $\varphi \circ \sigma' = \varphi'$. Wegen der universellen Eigenschaft des Polynomrings existiert ein eindeutig bestimmtes φ, das dies alles erfüllt. Somit besitzt $R''[x_1, \ldots, x_n]$ die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, und es gilt $R''[x_1, \ldots, x_n] = R[x_1, \ldots, x_n] \otimes_R R''$.

(d) Gegeben sei eine R-Algebra A und Homomorphismen von R-Algebren $\varphi' : R'/I \to A$, $\varphi'' : R'' \to A$ wie in folgendem Diagramm



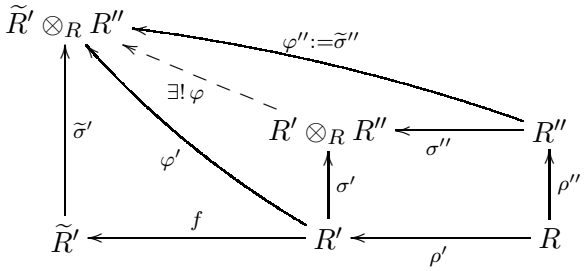
mit $\varphi' \circ \pi \circ \rho' = \varphi'' \circ \rho''$, wobei $\pi : R' \to R'/I$ und $\psi : R' \otimes_R R'' \to (R' \otimes_R R'')/(\sigma'(I))$ die kanonischen Epimorphismen sind. Wegen $(\psi \circ \sigma')(I) = \psi(\sigma'(I)) = (0)$ gibt es nach dem Homomorphiesatz einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\overline{\sigma}' : R'/I \to (R' \otimes_R R'')/(\sigma'(I))$ mit $\overline{\sigma}' \circ \pi = \psi \circ \sigma'$. Wir betrachten außerdem den Homomorphismus $\overline{\sigma}'' := \psi \circ \sigma'' : R'' \to (R' \otimes_R R'')/(\sigma'(I))$.

Gesucht ist nun ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\overline{\varphi} : (R' \otimes_R R'')/(\sigma'(I)) \to A$ mit $\overline{\varphi} \circ \overline{\sigma}' = \varphi'$ und $\overline{\varphi} \circ \overline{\sigma}'' = \varphi''$.

Wegen der universellen Eigenschaft von $R' \otimes_R R''$ gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\varphi : R' \otimes_R R'' \to A$ mit $\varphi'' = \varphi \circ \sigma''$ und $\varphi' \circ \pi = \varphi \circ \sigma'$. Dieser erfüllt $\varphi(\sigma'(I)) = \varphi'(\pi(I)) = (0)$ wegen $\pi(I) = (0)$. Nach dem Homomorphiesatz existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\overline{\varphi} : (R' \otimes_R R'')/(\sigma'(I)) \to A$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \psi$. Daraus folgt insbesondere $\overline{\varphi} \circ \overline{\sigma}'' = \overline{\varphi} \circ \psi \circ \sigma'' = \varphi \circ \sigma'' = \varphi''$ und $\overline{\varphi} \circ \overline{\sigma}' \circ \pi = \overline{\varphi} \circ \psi \circ \sigma' = \varphi \circ \sigma' = \varphi' \circ \pi$. Da π surjektiv ist, erhalten wir $\overline{\varphi} \circ \overline{\sigma}' = \varphi'$.

Man kann auch noch sehr einfach die Eindeutigkeit von $\overline{\varphi}$ überprüfen. Wir betrachten dazu einen weiteren Homomorphismus $\widetilde{\varphi} : (R' \otimes_R R'')/(\sigma'(I)) \to A$ mit $\widetilde{\varphi} \circ \overline{\sigma}' = \varphi'$ und $\widetilde{\varphi} \circ \overline{\sigma}'' = \varphi''$. Dann gilt $\widetilde{\varphi} \circ \psi \circ \sigma' = \widetilde{\varphi} \circ \overline{\sigma}' \circ \pi = \varphi' \circ \pi = \varphi \circ \sigma'$ und $\widetilde{\varphi} \circ \psi \circ \sigma'' = \widetilde{\varphi} \circ \overline{\sigma}'' = \varphi'' = \varphi \circ \sigma''$. Wegen der universellen Eigenschaft von $R' \otimes_R R''$ mus gelten $\widetilde{\varphi} \circ \psi = \varphi = \overline{\varphi} \circ \psi$ und da ψ surjektiv ist, folgt $\widetilde{\varphi} = \overline{\varphi}$. Somit besitzt $(R' \otimes_R R'')/(\sigma'(I))$ die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, und es gilt $(R' \otimes_R R'')/(\sigma'(I)) = R'/I \otimes_R R''$.

(e) Wir betrachten hier als R-Algebra das Tensorprodukt $\widetilde{R}' \otimes_R R''$ zusammen mit seinen Homomorphismen von R-Algebren $\widetilde{\sigma}' : \widetilde{R}' \to \widetilde{R}' \otimes_R R''$ und $\widetilde{\sigma}'' : R'' \to \widetilde{R}' \otimes_R R''$. Wir setzen $\varphi'' := \widetilde{\sigma}''$ und $\varphi' := \widetilde{\sigma}' \circ f : R' \to \widetilde{R}' \otimes_R R''$ wie in folgendem Diagramm



Aufgrund der universellen Eigenschaft von $R' \otimes_R R''$ existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\varphi : R' \otimes_R R'' \to \widetilde{R}' \otimes_R R''$ mit $\varphi \circ \sigma' = \varphi' = \widetilde{\sigma}' \circ f$ und $\varphi \circ \sigma'' = \varphi'' = \widetilde{\sigma}''$. Dies bedeutet, $\varphi(x \otimes y) = \varphi(x \otimes 1) \cdot \varphi(1 \otimes y) = \varphi(\sigma'(x)) \cdot \varphi(\sigma''(y)) = \widetilde{\sigma}'(f(x)) \cdot \widetilde{\sigma}''(y) = f(x) \otimes y$. □

Beispiel. Seien $X \subset \mathbb{A}^n$ und $Y \subset \mathbb{A}^m$ affine Varietäten mit zugehörigen Koordinatenringen $A(X) = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ und $A(Y) = k[y_1, \ldots, y_m]/I(Y)$. Dann ist

$$\begin{aligned} A(X) \otimes_k A(Y) &= \big(k[x_1, \ldots, x_n] \otimes_k A(Y)\big)/(I(X)) \\ &= \Big(\big(k[x_1, \ldots, x_n] \otimes_k k[y_1, \ldots, y_m]\big)/(I(Y))\Big)/(I(X)) \\ &= k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]/(I(X), I(Y))\,. \end{aligned}$$

Die erste und zweite Gleichung folgt dabei aus 2.3.9(d) und die dritte Gleichung folgt aus 2.3.9(c) und dem zweiten Isomorphiesatz [Bosch: *Algebra*, Satz 1.2/9].

Proposition 2.3.10. *Seien $X \subset \mathbb{A}^n$ und $Y \subset \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Man betrachte das Produkt $X \times Y := \{(P, Q) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \colon P \in X, Q \in Y\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$. Dann ist $(I(X), I(Y)) \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ ein Primideal und gleich dem Verschwindungsideal $I(X \times Y)$. Außerdem ist $X \times Y$ eine affine Varietät mit $A(X \times Y) = A(X) \otimes_k A(Y)$.*

Beweis. In Beispiel 2.3.6 haben wir schon gesehen, dass $I(X \times Y) = \mathrm{Rad}(I(X), I(Y))$ ist. Wir benutzen im folgenden, dass ein Element $\psi \in A(Y)$ genau dann gleich Null ist, wenn $\psi(Q) = 0$ ist für alle $Q \in Y$, vergleiche Bemerkung 2.1.2.

1. Wir betrachten einen Punkt $P \in X$ und $\Phi_P : A(X) \to k,\ \varphi \mapsto \varphi(P)$, den Einsetzungshomomorphismus. Der Kern von Φ_P ist das maximale Ideal $\{\varphi \in A(X) \colon \varphi(P) = 0\}$, das zu P gehört. Durch Tensorieren mit $A(Y)$ über k, siehe Proposition 2.3.9(e), erhalten wir den Homomorphismus

$$\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)} \colon A(X) \otimes_k A(Y) \longrightarrow k \otimes_k A(Y) = A(Y)\,,$$

der $f = \sum_i \varphi_i \otimes \psi_i$ für $\varphi_i \in A(X), \psi_i \in A(Y)$ abbildet auf

$$(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(f) = (\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(\textstyle\sum_i \varphi_i \otimes \psi_i) = \sum_i \Phi_P(\varphi_i) \otimes \psi_i = \sum_i \varphi_i(P) \cdot \psi_i \in A(Y)\,.$$

Für alle $Q \in Y$ gilt insbesondere

$$(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(f)(Q) = \sum_i \varphi_i(P) \cdot \psi_i(Q) = f(P, Q)\,. \tag{1}$$

Analog betrachten wir für $Q \in Y$ den Einsetzungshomomorphismus $\Phi_Q : A(Y) \to k,\ \psi \mapsto \psi(Q)$, für welchen gilt $(\mathrm{id}_{A(X)} \otimes \Phi_Q)(f)(P) = f(P, Q)$.

Für den k-Vektorraum $A(Y)$ wählen wir außerdem eine Basis $\{e_\mu : \mu \in M\}$, wobei M eine geeignete Indexmenge ist. Ist $f = \sum_i \varphi_i \otimes \psi_i$ und $\psi_i = \sum_\mu b_{i\mu} e_\mu \in A(Y)$ mit $b_{i\mu} \in k$, so berechnen wir

$$\begin{aligned} f = \sum_i \varphi_i \otimes \psi_i &= \sum_i (\varphi_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes \sum_\mu b_{i\mu} e_\mu) \\ &= \sum_i \sum_\mu b_{i\mu} (\varphi_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes e_\mu) \\ &= \sum_\mu \big((\sum_i b_{i\mu} \varphi_i) \otimes 1\big) \cdot (1 \otimes e_\mu) \\ &= \sum_\mu f_\mu \otimes e_\mu\,, \end{aligned}$$

mit $f_\mu := \sum_i b_{i\mu}\varphi_i \in A(X)$. Es ergibt sich $(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(f) = \sum_\mu f_\mu(P)\cdot e_\mu \in A(Y)$ und dies ist genau dann gleich Null, wenn $f_\mu(P) = 0$ ist für alle μ, da $\{e_\mu : \mu \in M\}$ eine k-Basis von $A(Y)$ ist. Gilt dies für alle $P \in X$, so ist $f_\mu(P) = 0$ für alle $P \in X$ und alle μ. Daraus folgt $f_\mu = 0$ in $A(X)$ für alle μ und dies impliziert $f = 0$. Wir halten dies noch einmal fest

$$(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(f) = 0 \text{ in } A(Y) \text{ für alle } P \in X \iff f = 0\,. \tag{2}$$

2. Wir zeigen nun, dass $(I(X), I(Y)) \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ ein Primideal ist, indem wir zeigen, dass $A(X) \otimes_k A(Y)$ ein Integritätsring ist, vergleiche obiges Beispiel. Seien dazu $f, g \in A(X) \otimes_k A(Y)$ mit $f \cdot g = 0$ und $g \neq 0$. Wir schreiben wieder $f = \sum_\mu f_\mu \otimes e_\mu$ mit $f_\mu \in A(X)$. Sei $P \in X$ zunächst fest gewählt und betrachte

$$(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})((f_\mu \otimes 1)\cdot g) \;=\; f_\mu(P)\cdot(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(g) \;\in\; A(Y)\,.$$

(a) Gilt nun für alle $Q \in Y$ die Gleichung $g(P, Q) = 0$, so folgt $(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(g) = 0$ in $A(Y)$ nach (1).

(b) Gibt es ein $Q \in Y$ mit $g(P, Q) \neq 0$, so gilt $(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(g) \neq 0$ in $A(Y)$ nach (1). Es folgt aus $fg = 0$, dass

$$0 \;=\; (\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(fg) \;=\; (\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(f)\cdot(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(g) \text{ in } A(Y)\,.$$

Da $A(Y)$ ein Integritätsring ist und der zweite Faktor ungleich Null ist, muss folglich gelten $0 = (\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})(f) = \sum_\mu f_\mu(P)\cdot e_\mu$ und es folgt $f_\mu(P) = 0$ für alle μ.

In beiden Fällen (a) und (b) gilt $(\Phi_P \otimes \mathrm{id}_{A(Y)})((f_\mu \otimes 1)\cdot g) = 0$ in $A(Y)$ für alle μ, d.h. dies gilt also für alle $P \in X$. Aus (2) folgt damit $(f_\mu \otimes 1)\cdot g = 0$ in $A(X) \otimes_k A(Y)$ für alle μ. Da $g \neq 0$, gibt es ein $Q \in Y$ mit $(\mathrm{id}_{A(X)} \otimes \Phi_Q)(g) \neq 0$ in $A(X)$ wegen dem Analogon von (2). Für alle μ ist daher

$$f_\mu \cdot (\mathrm{id}_{A(X)} \otimes \Phi_Q)(g) = (\mathrm{id}_{A(X)} \otimes \Phi_Q)(f_\mu \otimes 1)\cdot(\mathrm{id}_{A(X)} \otimes \Phi_Q)(g) = (\mathrm{id}_{A(X)} \otimes \Phi_Q)\big((f_\mu \otimes 1)\cdot g\big) = 0.$$

Da $A(X)$ ein Integritätsring ist, folgt $f_\mu = 0$ für alle μ und dies bedeutet $f = 0$ wie gewünscht. Wir haben also bewiesen, dass $A(X) \otimes_k A(Y)$ ein Integritätsring ist.

3. Da Primideale auch Radikalideale sind, ist $(I(X), I(Y)) = \mathrm{Rad}(I(X), I(Y)) = I(X \times Y)$. Dies zeigt, dass $X \times Y$ eine affine Varietät ist mit

$$A(X \times Y) \;=\; k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]/(I(X), I(Y)) \;=\; A(X) \otimes_k A(Y)\,.$$

□