4.1. Singularitäten

Erinnerung an den Satz über implizite Funktionen aus der Analysis.

Seien $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ reelle Polynome. Wir fassen diese als Funktion

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

auf, welche unendlich oft differenzierbar ist. Sei $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $f(P) = 0$, so dass der Rang der Jakobimatrix

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)_{i=1\dots m,\ j=1\dots n} \quad = \quad m$$

ist. OBdA (nach Umnummerierung der x_j) seien die ersten m Spalten linear unabhängig.

Der Satz über implizite Funktionen besagt dann, dass es offene Umgebungen U von $(a_1, \dots, a_m)$ in $\mathbb{R}^m$ und U' von $(a_{m+1}, \dots, a_n)$ in $\mathbb{R}^{n-m}$ und eine unendlich oft differenzierbare Funktion $g : U' \to U$ gibt mit $g(a_{m+1}, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_m)$ und

$$\left\{ (x,y) \in U \times U' : \ f_i(x,y) = 0 \ \ \forall i = 1, \dots, m \right\} \quad = \quad \left\{ (x,y) \in U \times U' : \ x = g(y) \right\}.$$

Setzt man $X = \{ P \in \mathbb{R}^n : f_i(P) = 0 \ \ \forall i = 1, \dots, m \}$, so sind

$$\begin{array}{rcl} X \cap (U \times U') & \longleftrightarrow & U' \\ (x,y) & \mapsto & y \\ \big(g(y), y\big) & \leftarrow\!\shortmid & y \end{array}$$

C^∞-diffeomorph. Die Zahl $n - \operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right) \ = \ n - m$ ist die reelle Dimension von U' und somit auch die von X bei P. Dies motiviert folgende Definition in der algebraischen Geometrie.

Definition 4.1.1. Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät der Dimension d und sei $I(X) = (f_1, \dots, f_m) \subset k[x_1, \dots, x_n]$.

a) Sei $P \in X$ ein Punkt. Dann heißt X *nicht-singulär* (oder *regulär*) *bei* P, falls der Rang der *Jacobi-Matrix*
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)_{i=1\dots m,\ j=1\dots n}$$
gleich $n - d$ ist. Andernfalls heißt X *singulär bei* P.

b) X heißt *nicht-singulär* (oder *regulär*), falls X nicht-singulär bei allen Punkten $P \in X$ ist.

Um das Konzept von Singularität besser zu verstehen, erinnern wir an den Begriff der Richtungsableitung. Ist $t \in k^n$ und $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom, so können wir die Richtungsableitung von f in P in Richtung t betrachten

$$\frac{\partial f}{\partial t}(P) \ := \ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right) \cdot t \ \in \ k\,.$$

Ist nun $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät und $f \in I(X)$, so ist $f = 0$ konstant auf X. Für alle Richtungsvektoren $t \in k^n$, die tangential an X in einem Punkt $P \in X$ sind, sollte deshalb

$$\frac{\partial f}{\partial t}(P) \ = \ 0$$

sein. Dies legt folgende Definition nahe.

Definition 4.1.2. Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät und $P \in X$ ein Punkt. Dann ist der *Tangentialraum an X in P* definiert als

$$T_P X \quad := \quad \left\{ t \in k^n : \ \frac{\partial f}{\partial t}(P) = 0 \quad \text{für alle } f \in I(X) \right\}.$$

Bemerkung. Ist $k = \mathbb{C}$ und X nicht-singulär, so lässt sich X als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ auffassen und unsere Definition stimmt mit der Definition des Tangentialraums aus der Analysis überein.

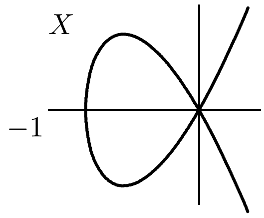
Folgerung 4.1.4. a) Ist $I(X) = (f_1, \ldots, f_m)$, so ist $T_P X \ = \ \ker \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{i,j} : \ k^n \to k^m \right)$.

b) Ist $P \in X$, dann ist X nicht-singulär bei P genau dann, wenn $\dim_k T_P X = \dim X$ gilt.

Beispiele 4.1.4. a) $T_P \mathbb{A}^n = k^n$ für alle Punkte $P \in \mathbb{A}^n$.

b) Sei $f = y^2 - x^2(x+1)$ und $X = V(f) \subset \mathbb{A}^2$.
Dann ist $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 2x$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Also

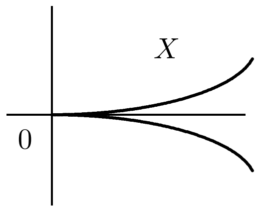
bei $P = (-1, 0)$ ist $T_P X = \ker\big((-1,0) : k^2 \to k\big) = k \cdot \binom{0}{1}$ und
bei $P = (0,0)$ ist $T_P X = \ker\big((0,0) : k^2 \to k\big) = k^2$.



Bei $P = (0,0)$ ist X singulär. Es liegt ein *gewöhnlicher Doppelpunkt* (englisch *node*) vor, da sich zwei Äste mit verschiedener Tangentialrichtung schneiden.

c) Sei $f = y^2 - x^3$ und $X = V(f) \subset \mathbb{A}^2$.
Dann ist $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Also

bei $P = (0,0)$ ist $T_P X = \ker\big((0,0) : k^2 \to k\big) = k^2$.



Bei $P = (0,0)$ ist X singulär. Es liegt eine *Spitze* (englisch *cusp*) vor, da sich zwei Äste mit gleicher Tangentialrichtung schneiden.

Ein Nachteil der oben gegebenen Definition von Nicht-Singularität ist, dass sie scheinbar von der Einbettung von X in $\mathbb{A}^n$ abhängt. Dass dies jedoch nicht so ist, wurde von Oskar Zariski (1899-1986) in einem fundamentalen Artikel 1947 bewiesen. Zariski zeigte, dass die Nicht-Singularität intrinsisch mit Hilfe der lokalen Ringe der Varietät beschrieben werden kann.

Zur Erläuterung von Zariskis Resultat sei $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ ein Punkt und $t \in T_P \mathbb{A}^n = k^n$ ein Tangentialvektor. Wir betrachten den Homomorphismus von k-Vektorräumen

$$k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow k, \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(P).$$

Sei $I(P) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ das maximale Ideal von P. Wir zerlegen den Vektorraum $k[x_1, \ldots, x_n]$ in eine direkte Summe $k[x_1, \ldots, x_n] = k \oplus I(P)$. Ist $f \in k$ eine konstante Funktion, oder $f \in I(P)^2$, so gilt $\frac{\partial f}{\partial t}(P) = 0$. Somit induziert t einen Homomorphismus von k-Vektorräumen

$$h_t : \ I(P)/I(P)^2 \longrightarrow k, \quad \bar{f} := f \bmod I(P)^2 \ \mapsto \ \frac{\partial f}{\partial t}(P).$$

Gehen wir einen Schritt weiter und betrachten nun die Abbildung

$$\Psi:\ T_P\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-VR}}(I(P)/I(P)^2,k) =: (I(P)/I(P)^2)^\vee\,, \quad t \mapsto h_t\,.$$

Ψ ist ein Homomorphismus von k-Vektorräumen. Wir zeigen zunächst, dass Ψ injektiv ist. In der Tat, ist $t = (t_1,\dots,t_n)^T \neq 0$, etwa $t_i \neq 0$, so folgt $h_t(\overline{x_i - a_i}) = (0,\dots,1,\dots,0)\cdot t = t_i \neq 0$. Also ist h_t ungleich der Nullabbildung $0 \in \big(I(P)/I(P)^2\big)^\vee$. Da

$$I(P)/I(P)^2 \;=\; \bigoplus_{i=1}^{n} k\cdot\overline{x_i - a_i}$$

und $\dim_k T_P\mathbb{A}^n = n = \dim_k I(P)/I(P)^2 = \dim_k\big(I(P)/I(P)^2\big)^\vee$ ist, folgt aus der Injektivität auch die Surjektivität. Somit ist Ψ ein Isomorphismus.

Nun verallgemeinern wir dies auf beliebige Varietäten. Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät und $P \in X$ ein Punkt. Sei wie oben $I(P) \subset k[x_1,\dots,x_n]$ das maximale Ideal von P als Punkt von $\mathbb{A}^n$. Dann ist $I(X) \subset I(P)$ und $I_X(P) = I(P)/I(X) \subset A(X)$ ist das maximale Ideal von P als Punkt von X.

Wählen wir den Tangentialvektor $t \in T_PX$, so gilt $\frac{\partial f}{\partial t}(P) = 0$ für alle $f \in I(X)$. Somit ist der Wert $\frac{\partial f}{\partial t}(P)$ für $f \in A(X) = k[x_1,\dots,x_n]/I(X)$ wohldefiniert und h_t faktorisiert über den Epimorphismus α.

$$\begin{tikzcd} I(P)/I(P)^2 \arrow[rr, "h_t"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & k \\ & I_X(P)/I_X(P)^2 \arrow[ur, dashed, "\exists\,\bar h_t"'] & \end{tikzcd}$$

D.h. es existiert ein Homomorphismus $\bar h_t$ mit $h_t = \bar h_t \circ \alpha$.

Wie oben liefert dies eine Abbildung $\Psi' : T_PX \to (I_X(P)/I_X(P)^2)^\vee\,,\ t \mapsto \bar h_t$, welche ein Homomorphismus von k-Vektorräumen ist.

Die Surjektivität von α impliziert nun, dass der duale Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-VR}}(I_X(P)/I_X(P)^2,k) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-VR}}(I(P)/I(P)^2,k)\,, \quad \bar h \mapsto \bar h \circ \alpha$$

injektiv ist. Wir erhalten also das folgende Diagramm

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & T_P\mathbb{A}^n & \xrightarrow{\sim} & (I(P)/I(P)^2)^\vee \\ & \cup & & \cup \\ \Psi': & T_PX & \longrightarrow & (I_X(P)/I_X(P)^2)^\vee \end{array}$$

Zwangsläufig ist Ψ' injektiv. Wir zeigen, dass Ψ' auch surjektiv ist. Sei $\bar h \in (I_X(P)/I_X(P)^2)^\vee$ und betrachte $\bar h \circ \alpha \in (I(P)/I(P)^2)^\vee$. Aus der Bijektivität von Ψ folgt die Existenz eines Tangentialvektors $t \in T_P\mathbb{A}^n$ mit $h_t = \Psi(t) = \bar h \circ \alpha$ und es bleibt zu zeigen, dass $t \in T_PX$ ist.

Dazu nehmen wir ein beliebiges Polynom $f \in I(X)$. Dann ist $\alpha(f \bmod I(P)^2) = 0$ und also $\frac{\partial f}{\partial t}(P) = h_t(f) = \bar h \circ \alpha(f \bmod I(P)^2) = 0$. Daraus folgt $t \in T_PX$. Somit ist $\Psi' : T_PX \to (I_X(P)/I_X(P)^2)^\vee$ ein Isomorphismus. Zusammenfassend erhalten wir folgenden Satz.

Satz 4.1.5. *Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät und $P \in X$ ein Punkt, sowie $I_X(P) \subset A(X)$ dessen maximales Ideal. Dann ist die Abbildung $T_PX \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}VR}(I_X(P)/I_X(P)^2,k)\,, t \mapsto h_t$ mit $h_t:\ f \bmod I_X(P)^2 \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(P)$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen.* □

Dieser Satz veranlasst uns zu folgender Definition.

Definition 4.1.6. Sei X eine Prävarietät und $P \in X$ ein Punkt. Sei $U \subset X$ eine offene, affine Umgebung von P und $I_U(P) \subset A(U) := \mathcal{O}_X(U)$ das maximale Ideal von P in U.

a) Dann heißt $(I_U(P)/I_U(P)^2)^\vee := \mathrm{Hom}_{k\text{-VR}}(I_U(P)/I_U(P)^2, k)$ der *Zariski-Tangentialraum von X in P*. (Er wird auch mit $T_P X$ bezeichnet.)

b) Der Ring $A(U)$ heißt *regulär in* $I_U(P)$, falls die Dimension des k-Vektorraums $I_U(P)/I_U(P)^2$ gleich $\dim A(U)$ ist.

c) Die Prävarietät X heißt *nicht-singulär* (oder *regulär*) *in* P, falls $A(U)$ regulär in $I_U(P)$ ist.

Bemerkung 4.1.7. a) Der Zariski-Tangentialraum von X in P ist unabhängig von der offenen, affinen Umgebung U.
Genauer gesagt, falls $\mathfrak{m}_P := I_U(P)\cdot\mathcal{O}_{X,P} = \{ \frac{a}{s} : a \in I_U(P),\, s \in A(U) \setminus I_U(P) \}$ das maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{U,P} = A(U)_{I_U(P)}$ ist, so ist

$$\alpha :\, I_U(P)/I_U(P)^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2\,, \qquad a \bmod I_U(P)^2 \longmapsto \tfrac{a}{1} \bmod \mathfrak{m}_p^2$$

ein Isomorphismus von k-Vektorräumen.

Beweis. Um die Surjektivität zu zeigen, sei $\frac{a}{s} \in \mathfrak{m}_P$ mit $a \in I_U(P)$ und $s \notin I_U(P)$ gegeben. Weil $A(U)/I_U(P)$ ein Körper ist, gibt es ein $r \in A(U) \setminus I_U(P)$ mit $rs - 1 \in I_U(P)$. Es folgt

$$\frac{ar}{1} = \frac{ars}{s} = \frac{a}{s} + \frac{a(rs-1)}{s}.$$

Der letzte Summand liegt in $\mathfrak{m}_P^2$, sodass $\frac{a}{s} \bmod \mathfrak{m}_P^2 = \frac{ar}{1} \bmod \mathfrak{m}_P^2 = \alpha\big(ar \bmod I_U(P)^2\big)$ in $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ gilt.

Um zu sehen, dass α injektiv ist, sei $a \in I_U(P)$ mit $\frac{a}{1} = \sum_i \frac{a_i}{s_i}\frac{b_i}{s_i'} \in \mathfrak{m}_P^2$, wobei $a_i, b_i \in I_U(P)$. Bringt man alles auf einen gemeinsamen Nenner, so ist $\frac{a}{1} = \frac{c}{s}$ mit $c \in I_U(P)^2$. Nach Definition der Lokalisierung gibt es ein $\tilde{s} \notin I_U(P)$ mit $as\tilde{s} = c\tilde{s} \in I_U(P)^2$. Wählen wir wieder ein r mit $1 - rs\tilde{s} \in I_U(P)$, so folgt $a = a(1 - rs\tilde{s}) + cr\tilde{s} \in I_U(P)^2$. ☐

b) Nach Satz 1.4.3, sowie [Gathmann: Algebraic Geometry, Proposition 4.2.1] gilt $\dim A(U) = \dim U = \dim X$ für jede offene, affine Teilmenge U einer Prävarietät X. Dies bedeutet, dass X genau dann regulär in P ist, wenn $\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) = \dim X$ ist. Somit ist auch die Frage, ob X regulär in P ist unabhängig von der offenen, affinen Umgebung U.

c) Mithilfe des sogenannten „Going-down“ kann man zeigen, dass für jeden Punkt P auf einer Prävarietät X gilt $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,P}$; siehe [Eisenbud: Commutative Algebra, Theorem A (S. 286) und dessen Beweis (S. 289)]. Somit ist X genau dann reguär in P, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,P}$ *regulär* ist, d.h. regulär in seinem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P$ ist, im Sinne von Definition 4.1.6 b).

Satz 4.1.8. *Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät und $P \in X$ ein Punkt. Dann ist X nicht-singulär bei P im Sinne von Definition 4.1.1 genau dann, wenn $A(X)$ regulär in $I_X(P)$ ist, d.h. wenn X nicht-singulär in P ist im Sinne von Definition 4.1.6.*

Beweis. Sei $T_P X$ der Tangentialraum von X in P wie in Definition 4.1.2. Nach Satz 4.1.5 ist $\dim_k T_P X = \dim_k I_X(P)/I_X(P)^2$ und nach Satz 1.4.3 gilt für die Dimension $\dim X = \dim A(X)$. Die Behauptung folgt nun daraus, dass X bei P nicht-singulär ist genau dann, wenn $\dim X = \dim_k T_P X$. ☐

Wir gehen schließlich noch der Frage nach, ob es auf einer Varietät nicht-singuläre Punkte gibt.

Satz 4.1.9. *Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät. Dann ist die Menge X_{sing} der singulären Punkte von X eine echte, abgeschlossene Teilmenge von X, d.h. die Menge X_{reg} der regulären Punkte von X ist offen und dicht in X.*

Beweis. Nur für den Fall, dass X eine Kurve im $\mathbb{A}^2$, bzw. eine Hyperfläche $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ ist.

Sei $X \subset \mathbb{A}^2$ eine Kurve. Dann zeigt Blatt 4, Aufgabe 3, dass $X = V(f)$ für ein irreduzibles Polynom $f \in k[x_1, x_2]$ ist. Also ist X eine Hyperfläche.

Sei nun etwas allgemeiner $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche für ein irreduzibles Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Es ist $\dim X = n-1$ nach [Gathmann: Algebraic Geometry, Example 4.2.2(iii)].

1. Wir zeigen zunächst, dass $X_{sing} \subset X$ abgeschlossen ist. Für jeden Punkt $P \in X$ ist

$$T_P X = \Big\{ t \in k^n : \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \Big) \cdot t = 0 \Big\} .$$

Also gilt

$$\begin{array}{lclcll} \dim_k T_P X & \geq & n-1 & = & \dim X & \text{für alle } P \quad \text{und} \\ \dim_k T_P X & > & n-1 & \iff & \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \ldots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0 . & \end{array}$$

Somit ist $X_{sing} = V(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \subset X$ abgeschlossen.

2. Wir zeigen nun, dass $X_{sing} \neq X$ ist und nehmen dazu das Gegenteil an: $X_{sing} = X$. Dann folgt $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in I(X) = (f)$ für alle i, d.h. f teilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in $k[x_1, \ldots, x_n]$. Da aber der Grad von f in der Variablen x_i größer ist als der Grad von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in x_i und f irreduzibel ist, muss $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ sein.

Ist die Charakteristik von k gleich 0, so ist dies unmöglich.

Ist die Charakteristik von k gleich $p > 0$, so folgt $f = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{p i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p i_n}$. Sei $b_{i_1 \ldots i_n} \in k$ mit $b_{i_1 \ldots i_n}^p = a_{i_1 \ldots i_n}$ (k ist algebraisch abgeschlossen). Dann ist

$$f \; = \; \sum b_{i_1 \ldots i_n}^p x_1^{p i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p i_n} \; = \; \Big(\sum b_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} \Big)^p \quad \text{nicht irreduzibel.}$$

Dies ist ein Widerspruch. Somit ist unsere Annahme falsch und $X_{sing} \neq X$. □

Bemerkung. Der allgemeine Fall von Satz 4.1.9 lässt sich folgendermaßen beweisen:

1. Eine Untersuchung der Jacobi-Matrix $\big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\big)_{i,j}$ zeigt, dass für alle Punkte $P \in X$ die Ungleichung $\dim_k T_P X \geq \dim X =: d$ gilt und dass $\dim_k T_P X > \dim X$ genau dann, wenn alle Unterdeterminanten der Jacobi-Matrix von Größe $n-d$ bei P verschwinden. Somit ist X_{sing} die Nullstellenmenge aller dieser Unterdeterminanten und folglich abgeschlossen in X. Genau dies war auch oben das Argument im Fall $d = n-1$.

2. Man zeigt, dass es einen Morphismus $\varphi : X \to \widetilde{X} \subset \mathbb{A}^{d+1}$ auf eine Hyperfläche $\widetilde{X}$ gibt, so dass für offene, affine Teilmengen $U \subset X$ und $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ gilt $\varphi|_U : U \to \widetilde{U}$ ist ein Isomorphismus. Wir haben oben gezeigt, dass $\widetilde{X}_{reg} \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$. Da $\varphi|_U$ einen Isomorphismus der Koordinatenringe $A(\widetilde{U}) \xrightarrow{\sim} A(U)$ induziert und Singularität nach Satz 4.1.8 nur vom Koordinatenring abhängt, folgt daraus $X_{reg} \cap U \neq \emptyset$. Somit ist X_{reg} offen und dicht in X, vergleiche [Hartshorne: Algebraic Geometry, Theorem I.5.3].