Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

1. Übungsblatt

Abgabetermin: Di, 10.4.12, 14:00 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Dienstag: Kapitel 1.1 – 1.2

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(k)$ algebraisch sind. Skizzieren Sie diese Mengen für $k = \mathbb{R}$.

   (a) $\{(t, t^2) : t \in k\}$
   (b) $\{(t^2, t^3) : t \in k\}$
   (c) $\{(t, 0) : t \in k\} \cup \{(0, t) : t \in k\}$
   (d) $\{(t^2, t^3 - t) : t \in k\}$

   (4 Punkte)

3. Die Menge der $n \times m$ Matrizen $M_{n\times m}(k)$ lässt sich als affiner Raum der Dimension $n \cdot m$ auffassen. Sei $r \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge $M^r_{n\times m}(k)$ der Matrizen vom Rang $< r$ algebraisch ist. Zum Beispiel ist

   $$M^2_{2\times 2}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \right\}.$$

   (b) Ist die Menge der Matrizen vom Rang $= r$ ebenfalls algebraisch?

   (3+1 Punkte)

4. Sei $U \subseteq k^n$ ein d-dimensionaler affiner Unterraum. Zeigen Sie, dass U die Nullstellenmenge von $n - d$ linearen Polynomen ist und folglich eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^n(k)$ ist.

   (4 Punkte)

5. Überlegen Sie sich für die Übung eine Frage zu den Themen *Polynomringe, Ideale* und *algebraische Mengen.*