Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

1. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(k)$ algebraisch sind. Skizzieren Sie diese Mengen für $k = \mathbb{R}$.

   (a) $\{(t, t^2) : t \in k\}$

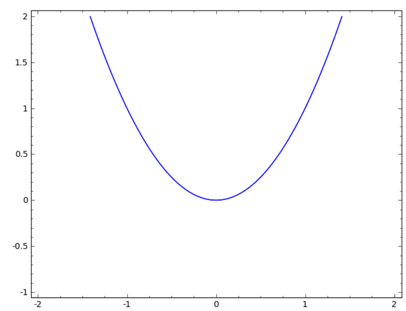
   (b) $\{(t^2, t^3) : t \in k\}$

   (c) $\{(t, 0) : t \in k\} \cup \{(0, t) : t \in k\}$

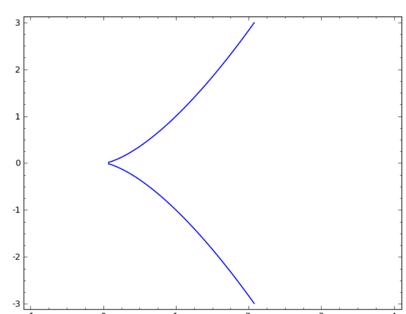
   (d) $\{(t^2, t^3 - t) : t \in k\}$

   Lösung: Wir benutzen die Koordinaten x, y auf $\mathbb{A}^2(k)$.

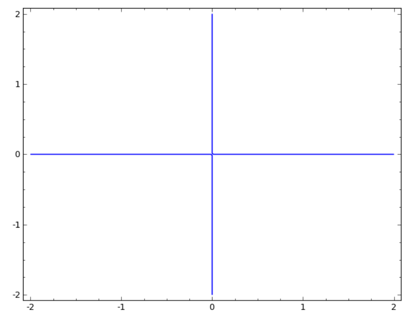
   (a) Es gilt $\{(t, t^2) : t \in k\} = V(y - x^2)$. Das ist die Normalparabel:



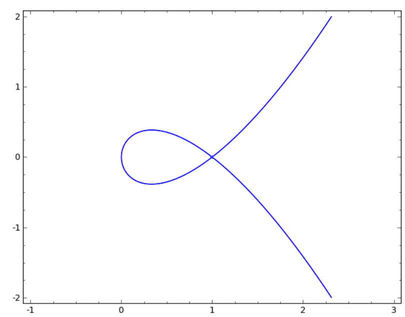
   (b) Aus $(x, y) = (t^2, t^3)$ folgt $x^3 = y^2$. Ist umgekehrt $x^3 = y^2$, so gibt es ein $t \in k$ mit $x = t^2$ (k ist alg. abgeschlossen) und daher $y^2 = (t^2)^3 = (t^3)^2$, also $y = \pm t^3$. Falls $y = -t^3$, ersetze t durch $-t$. In jedem Fall gilt dann $(x, y) = (t^2, t^3)$. Damit ist gezeigt, dass $\{(t^2, t^3) : t \in k\} = V(x^3 - y^2)$. Das ist die Neilsche Parabel (mit einer Spitze im Nullpunkt):



   (c) Es gilt $\{(t, 0) : t \in k\} = V(y)$ und $\{(0, t) : t \in k\} = V(x)$, also ist der Durchschnitt $V(x) \cap V(y) = V(xy)$. Es handelt sich um die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen:



(d) Aus $(x, y) = (t^2, t^3 - t)$ folgt $y^2 = (t(t^2 - 1))^2 = x(x - 1)^2$. Ist umgekehrt $y^2 = x(x - 1)^2$, so wähle man $t \in k$ mit $x = t^2$. Dann ist $y = \pm t(t^2 - 1)$. Wieder kann man ggf. t durch $-t$ ersetzen und erhält $(x, y) = (t^2, t^3 - t)$. Damit ist $\{(t^2, t^3 - t) : t \in k\} = V(y^2 - x(x - 1)^2)$ gezeigt. Die Kurve ist ein „Fisch" (mit einem Knotenpunkt im Ursprung):



3. Die Menge der $n \times m$ Matrizen $M_{n\times m}(k)$ lässt sich als affiner Raum der Dimension $n \cdot m$ auffassen. Sei $r \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $M^r_{n\times m}(k)$ der Matrizen vom Rang $< r$ algebraisch ist. Zum Beispiel ist

$$M^2_{2\times 2}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \right\}.$$

(b) Ist die Menge der Matrizen vom Rang $= r$ ebenfalls algebraisch?

LÖSUNG: Eine Matrix hat Rang $< r$ genau dann, wenn sie keine invertierbare $r \times r$-Untermatrix besitzt, d.h. wenn jede $r \times r$-Unterdeterminante verschwindet. Daher ist $M^r_{n\times m}(k)$ die Nullstellenmenge dieser Unterdeterminanten, welche bekanntlich Polynome in den Matrixeinträgen sind (Leibniz-Formel). Also handelt es sich um eine algebraische Menge. Die 1×1-Matrizen vom Rang $= 1$ identifizieren sich mit $k^* \subseteq \mathbb{A}^1(k)$, was nicht algebraisch ist (jedes Polynom in einer Variablen hat nur endlich viele Nullstellen, oder verschwindet überall).

4. Sei $U \subseteq k^n$ ein d-dimensionaler affiner Unterraum. Zeigen Sie, dass U die Nullstellenmenge von $n - d$ linearen Polynomen ist und folglich eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^n(k)$ ist.

LÖSUNG: Im Spezialfall $U = k^d \times 0^{n-d} \subseteq k^n$ ist $U = V(x_{d+1}, \ldots, x_n)$, fertig. Der allgemeine Fall lässt sich durch eine affine Koordinatentransformation darauf reduzieren. Im Detail:

Verschiebe zunächst U in den Ursprung; das entspricht einem Koordinatenwechsel der Form $x_i \mapsto x_i + a_i$, wobei $(a_1, \ldots, a_n) \in U$. Wir können daher annehmen, dass U ein Unterraum von k^n ist. Sei nun $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von U und ergänze dies mittels $v_{d+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis von k^n. Fasst man die v_i als Spalten auf, so ist $(a_{ij}) = (v_1 | \cdots | v_n)$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Machen wir nun den linearen Koordinatenwechsel $x_i \mapsto \sum_j a_{ij} x_j$, so wird U auf die Standardform $k^d \times 0^{n-d}$ gebracht. Um Gleichungen für U zu finden, muss man die Matrix (a_{ij}) invertieren.

Hier ein Beispiel, welches den Beweis vielleicht verständlicher macht und obendrei zeigt, dass er konstruktiv ist: Betrachte die Ebene

$$U = (1,0,0) + \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$$

im 3-dimensionalen Raum. Wir müssen nur Gleichungen für den von den Vektoren $(1,0,1), (0,1,1)$ erzeugten Unterraum finden. Wir können diese mittels $(1,0,0)$ zu einer Basis ergänzen. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit Inversem

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle = \{(x,y,z) \in k^3 : x + y - z = 0\}$, und damit

$$U = \{(x,y,z) \in k^3 : x + y - z - 1 = 0\} = V(x_1 + x_2 - x_3 - 1).$$

Hier wieder ein Bild für $k = \mathbb{R}$: