Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

2. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 16.4.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Freitag: Kapitel 1.2

2. Überlegen Sie sich:

   (a) Ein topologischer Raum Y ist genau dann Hausdorff, wenn für je zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ gilt, dass $\{P \in X : f(P) = g(P)\}$ abgeschlossen in X ist.

   (b) Nur für $n = 0$ ist $\mathbb{A}^n(k)$, versehen mit der Zariski-Topologie, Hausdorff.

   (c) Für $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ist $\{P \in \mathbb{A}^n(k) : f(P) = g(P)\}$ abgeschlossen.

   (4 Punkte)

3. (a) Für $n, m \in \mathbb{N}$ überlege man sich, dass die Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^{n+m}(k) & \to & \mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{A}^m(k) \\ (x_1, \ldots, x_{n+m}) & \mapsto & \big((x_1, \ldots, x_n), (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})\big) \end{array}$$

   stetig ist, wenn wir das Produkt mit der Produkttopologie versehen.

   (b) Ist diese Bijektion ein Homöomorphismus? Man untersuche diese Frage im Fall $n = m = 1$.

   (4 Punkte)

4. Bestimmen Sie das Verschwindungsideal $I(V)$ für die folgenden algebraischen Mengen:

   (a) $V = \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$

   (b) $V = \{(t^2, t^3) : t \in k\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$

   (c) $V = \mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{A}^1(\overline{\mathbb{F}_p})$, wobei p eine Primzahl ist

   (4 Punkte)

5. Überlegen Sie sich für die Übung am 11.4. eine Frage zu den Themen *Zariski-Topologie* und *Verschwindungsideal*.