Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

2. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

2. Überlegen Sie sich:

   (a) Ein topologischer Raum Y ist genau dann Hausdorff, wenn für je zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ gilt, dass $\{P \in X : f(P) = g(P)\}$ abgeschlossen in X ist.

   (b) Nur für $n = 0$ ist $\mathbb{A}^n(k)$, versehen mit der Zariski-Topologie, Hausdorff.

   (c) Für $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ist $\{P \in \mathbb{A}^n(k) : f(P) = g(P)\}$ abgeschlossen.

LÖSUNG: (a) Sei Y Hausdorff und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Ist dann $f(P) \neq g(P)$, so gibt es disjunkte offene Umgebungen U, V von $f(P), g(P)$. Weil f, g stetig sind, sind dann $f^{-1}(U), g^{-1}(V)$ offene Umgebungen von P. Für alle $Q \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ gilt $f(Q) \neq g(Q)$. Damit ist $\{P \in X : f(P) \neq g(P)\}$ offen, also das Komplement abgeschlossen. Ist dies umgekehrt für alle f, g der Fall, so gilt dies insbesondere für die beiden Projektionen $p_1, p_2 : Y \times Y \to Y$. Das heißt, dass $\Delta(Y) := \{(P, P) \in Y \times Y : P \in Y\}$ abgeschlossen in $Y \times Y$ ist. Sind nun $P \neq Q$ in Y gegeben, so ist das Komplement $\Delta(Y)^c$ eine offene Umgebung von (P, Q). Dann gibt es offene Umgebungen U, V von P, Q mit $U \times V \subseteq \Delta(Y)^c$, das heißt $U \cap V = \emptyset$. Also ist Y Hausdorff.

(b) Für $n = 0$ ist $\mathbb{A}^n(k)$ nur ein Punkt, also Hausdorff. Für $n \geq 1$ ist $\mathbb{A}^1(k)$ homöomorph zur abgeschlossenen Teilmenge $V(x_2, \ldots, x_n) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$. Es reicht daher zu zeigen, dass $\mathbb{A}^1(k)$ nicht Hausdorff ist. Dieser Raum trägt die sogenannte kofinite Topologie: Die echten abgeschlossenen Mengen sind endlich (Vorlesung, 1.1.9). Die nichtleeren offenen Teilmengen sind also koendlich und je zwei koendliche Teilmengen schneiden sich.
Also ist $\mathbb{A}^1(k)$ das komplette Gegenteil eines Hausdorff-Raumes.

(c) Diese Menge ist $V(f - g)$, nach Definition also abgeschlossen.

Bemerkung: Auch wenn $\mathbb{A}^1(k)$ nicht Hausdorff ist, gilt die dazu äquivalente Bedingung in (a) zumindest für polynomielle Funktionen. Dies wird später zum Begriff der Separiertheit führen, welcher in der algebraischen Geometrie den Hausdorff-Begriff ersetzt.

3. (a) Für $n, m \in \mathbb{N}$ überlege man sich, dass die Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^{n+m}(k) & \to & \mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{A}^m(k) \\ (x_1, \ldots, x_{n+m}) & \mapsto & \big((x_1, \ldots, x_n), (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})\big) \end{array}$$

   stetig ist, wenn wir das Produkt mit der Produkttopologie versehen.

   (b) Ist diese Bijektion ein Homöomorphismus? Man untersuche diese Frage im Fall $n = m = 1$.

LÖSUNG: Vorbemerkung: Sind X, Y topologische Räume, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie ein Durchschnitt von Mengen der Form $A \times Y \cup X \times B$ mit abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

(a) Nennen wir die Bijektion θ. Sind $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit Bildern $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_r}$ in $k[x_1, \dots, x_{n+m}]$, so ist $\theta^{-1}(V(f_1, \dots, f_r) \times \mathbb{A}^m(k)) = V(\overline{f_1}, \dots, \overline{f_r})$ abgeschlossen. Ähnlich geht man mit Mengen der Form $\mathbb{A}^n(k) \times V(\dots)$ um. Aus der Vorbemerkung (oder besser, aus der universellen Eigenschaft des Produktes) folgt daher, dass θ stetig ist.

(b) Das Bild der abgeschlossenen Teilmenge $V(x-y) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ unter θ ist $\{(a,a) : a \in k\} \subseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, welches nicht nach Aufgabe 1 nicht abgeschlossen ist bezüglich der Produkttopologie.

Bemerkung: Man möchte natürlich trotzdem $\mathbb{A}^{n+m} \cong \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ haben; dies wird uns später mit einer besseren Definition des Produktes gelingen.

4. Bestimmen Sie das Verschwindungsideal $I(V)$ für die folgenden algebraischen Mengen:

   (a) $V = \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$

   (b) $V = \{(t^2, t^3) : t \in k\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$

   (c) $V = \mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{A}^1(\overline{\mathbb{F}_p})$, wobei p eine Primzahl ist

Lösung: (a) Es gilt $I(\{(0,0)\}) = (x,y)$ und $I(\{(1,0)\}) = (x-1,y)$, also $I(V) = (x,y) \cap (x-1,y) = (x(x-1),y)$; die letzte Gleichung folgt aus der Gleichung $(x) \cap (x-1) = (x(x-1))$ in $k[x,y]/(y) \cong k[x]$, welche wiederum mit dem chinesischen Restsatz daraus folgt, dass x und $x-1$ teilerfremd sind.

(b) Das Polynom $y^2 - x^3$ verschwindet auf V. Also gilt $(y^2 - x^3) \subseteq I(V)$. Sei umgekehrt $f \in I(V)$, das heißt $f \in k[x,y]$ mit $f(t^2, t^3) = 0$ für alle $t \in k$. Weil k unendlich ist, gilt bereits $f(x^2, x^3) = 0$ in $k[x]$. Polynomdivison in $k[x][y]$ liefert $p, q \in k[x]$ mit $f \equiv p + qy \bmod y^2 - x^3$. Es gilt dabei $0 = p(x^2) + q(x^2)x^3$. Der erste Summand beinhaltet nur Potenzen von x mit geradem Exponenten, wogegen der zweite nur solche mit ungeraden Exponenten beinhaltet. Es folgt $p(x^2) = 0$ und $q(x^2) = 0$, also $p = q = 0$ und damit $f \in (y^2 - x^3)$. Wir haben $I(V) = (y^2 - x^3)$ gezeigt.

(c) Aus der Algebra ist bekannt, dass für $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p}$ genau dann $\alpha^p = \alpha$ gilt, wenn $\alpha \in \mathbb{F}_p$. Hier noch einmal das Argument: „$\Leftarrow$“ Für $\alpha = 0$ ist das klar. Für $\alpha \neq 0$ folgt aus Lagrange $\alpha^{p-1} = 1$. „$\Rightarrow$“ Ein Polynom vom Grad p kann nicht mehr als p Nullstellen haben.

Aus dieser Vorbemerkung folgt bereits $(x^p - x) \subseteq I(\mathbb{F}_p)$. Ist umgekehrt $f \in I(\mathbb{F}_p)$, so ist $(x-\alpha) | f$ für alle $\alpha \in \mathbb{F}_p$. Weil die $x - \alpha \in \overline{\mathbb{F}_p}[x]$ alle teilerfremd sind, wird f auch von $\prod_{\alpha \in \mathbb{F}_p}(x-\alpha) = x^p - x$ geteilt. Damit ist $I(\mathbb{F}_p) = (x^p - x)$ gezeigt.

Bemerkung: Mit dem Hilbertschen Nullstellensatz, den Sie zur Zeit kennenlernen, gehen die Rechnungen natürlich viel einfacher!