Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

3. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 23.4.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Freitag: Extrablatt über die Noether-Normalisierung
   bis Dienstag: Abschnitt 1.3

2. Seien $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n(k)$ algebraische Mengen. Zeigen Sie:
   (a) $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$
   (b) $I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)}$
   (c) Finden Sie ein Beispiel, bei dem man nicht auf das Radikal in (b) verzichten kann. Tipp: Betrachten Sie zwei Kurven in der affinen Ebene, die sich tangential berühren.

   (4 Punkte)

3. Im 4-dimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}^4(k)$ mit Koordinaten x, y, z, t betrachten Sie die beiden Ebenen $X' = \{x = y = 0\}$ und $X'' = \{z = x - t = 0\}$, sowie deren Vereinigung $X = X' \cup X''$.
   (a) Berechnen Sie das Verschwindungsideal $I(X) \subseteq k[x, y, z, t]$.
   (b) Für $a \in k$ sei $I_a \subseteq k[x, y, z]$ das Ideal, das durch Ersetzen von $t \mapsto a$ aus I entsteht. Sei $X_a = V(I_a) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$. Man stelle sich a als Zeitparameter vor. Überlegen Sie sich, dass X_a eine Vereinigung von zwei windschiefen Geraden im affinen Raum ist, welche sich für $a \rightsquigarrow 0$ „annähern“, bis sie sich schließlich für $a = 0$ (transversal) schneiden.
   (c) Für $a \neq 0$ ist I_a ein Radikalideal, für $a = 0$ jedoch nicht. Geben Sie ein Element in $\sqrt{I_0} \setminus I_0$ an und interpretieren Sie dieses anhand einer Skizze geometrisch.

   (4 Punkte)

4. Sei an dieser Stelle k ein beliebiger Körper. Zeigen Sie:
   (a) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat die Form $\{f : f(P) = 0\}$ für ein $P \in \overline{k}^n$. Diskutieren Sie auch das Beispiel $(x^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[x]$.
   (b) $\star$ Finden Sie damit eine Bijektion
   $$\{\text{maximale Ideale von } k[x_1, \ldots, x_n]\} \longleftrightarrow \mathbb{A}^n(\overline{k})/\mathrm{Aut}(\overline{k}/k).$$

   (4+2⋆ Punkte)

5. Überlegen Sie sich für die Übung am 18.4. eine Frage zu den Themen *(endliche) Ringerweiterungen*, *Radikalidealen* und *Hilbertscher Nullstellensatz*.