Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

3. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

2. Seien $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n(k)$ algebraische Mengen. Zeigen Sie:

   (a) $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$

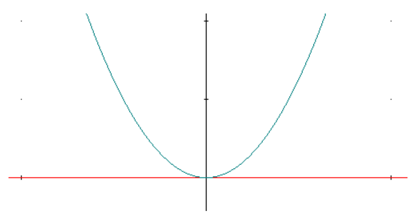
   (b) $I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)}$

   (c) Finden Sie ein Beispiel, bei dem man nicht auf das Radikal in (b) verzichten kann. Tipp: Betrachten Sie zwei Kurven in der affinen Ebene, die sich tangential berühren.

   Lösung: (a) Für $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ verschwindet f auf $X_1 \cup X_2$ genau dann, wenn f auf X_1 und auf X_2 verschwindet. Die Aussage ist also trivial.

   (b) Es gilt $V(I(X_1) + I(X_2)) = V(I(X_1)) \cap V(I(X_2)) = X_1 \cap X_2$, nach Hilberts Nullstellensatz also $\sqrt{I(X_1) + I(X_2)} = I(V(I(X_1) + I(X_2))) = I(X_1 \cap X_2)$.

   (c) Die Verschwindungsideale der Parabel $X_1 = \{y = x^2\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ und der x-Achse $X_2 = \{y = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ sind $I(X_1) = (y - x^2)$ und $I(X_2) = (y)$. Ihre Summe ist $I(X_1) + I(X_2) = (y - x^2, y) = (x^2, y)$ und damit kein Radikalideal. Es gilt nämlich $x^2 \in (x^2, y)$, aber die Annahme $x \in (x^2, y)$ führt nach Anwendung des Homomorphismus $k[x, y] \to k[x]$, $x \mapsto x$, $y \mapsto 0$ zu $x \in (x^2)$ in $k[x]$, was aus Gradgründen nicht geht.



3. Im 4-dimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}^4(k)$ mit Koordinaten x, y, z, t betrachten Sie die beiden Ebenen $X' = \{x = y = 0\}$ und $X'' = \{z = x - t = 0\}$, sowie deren Vereinigung $X = X' \cup X''$.

   (a) Berechnen Sie das Verschwindungsideal $I(X) \subseteq k[x, y, z, t]$.

   (b) Für $a \in k$ sei $I_a \subseteq k[x, y, z]$ das Ideal, das durch Ersetzen von $t \mapsto a$ aus I entsteht. Sei $X_a = V(I_a) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$. Man stelle sich a als Zeitparameter vor. Überlegen Sie sich, dass X_a eine Vereinigung von zwei windschiefen Geraden im affinen Raum ist, welche sich für $a \rightsquigarrow 0$ „annähern“, bis sie sich schließlich für $a = 0$ (transversal) schneiden.

   (c) Für $a \neq 0$ ist I_a ein Radikalideal, für $a = 0$ jedoch nicht. Geben Sie ein Element in $\sqrt{I_0} \setminus I_0$ an und interpretieren Sie dieses anhand einer Skizze geometrisch.

Lösung: (a) Wegen $X' = V(x,y)$ gilt nach dem Hilbertschen Nullstellensatz $I(X') = \sqrt{(x,y)} = (x,y)$. Hierbei ist (x,y) ein Radikalideal, weil der Quotient $k[x,y,z,t]/(x,y) \cong k[z,t]$ reduziert ist. Ähnlich sieht man $I(X'') = (z, x-t)$. Natürlich hätte man das auch direkt wie auf Blatt 2 nachrechnen können. Aus Aufgabe 1a folgt nun

$$I(X) = (x,y) \cap (z, x-t).$$

Im allgemeinen gilt für Ideale die Inklusion $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, aber wir behaupten, dass in unserem Beispiel sogar Gleichheit gilt.

Wegen der Inklusion haben einen kanonischen Epimorphismus

$$k[x,y,z,t]/((x,y)\cdot(z,x-t)) \twoheadrightarrow k[x,y,z,t]/((x,y)\cap(z,x-t)).$$

Unser Ziel ist es, die Injektivität zu zeigen. Zunächst überlegt man sich ein Erzeugendensystem des Quotienten links als k-Vektorraum: Es gelten dort die Relationen $xz = 0$, $x^2 = xt$, $yz = 0$, $yx = yt$. Man kann also die Monome weglassen, die x und z enthalten; ebenso solche, die y und z enthalten. Wenn x und y vorkommen, so kann man wegen $yx = yt$ annehmen, dass x doch nicht mehr vorkommt. Wegen $x^2 = xt$ kann man annehmen, dass x höchstens linear vorkommt. Ein Erzeugendensystem ist daher (wir schreiben $a^{\mathbb{N}} := \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$, $0 \in \mathbb{N}$):

$$y^{\mathbb{N}}, z^{\mathbb{N}}, t^{\mathbb{N}}, xt^{\mathbb{N}}, y^{\mathbb{N}}t^{\mathbb{N}}, z^{\mathbb{N}}t^{\mathbb{N}}.$$

Offenbar ist dann auch

$$1, y^{\mathbb{N}_{>0}}, z^{\mathbb{N}_{>0}}, t^{\mathbb{N}_{>0}}, xt^{\mathbb{N}}, y^{\mathbb{N}_{>0}}t^{\mathbb{N}_{>0}}, z^{\mathbb{N}_{>0}}t^{\mathbb{N}_{>0}}$$

ein Erzeugendensystem; der Beweis wird sogar zeigen, dass es eine Basis ist, aber das brauchen wir an dieser Stelle gar nicht.

Sei nun ein Element in $k[x,y,z,t]/((x,y)\cdot(z,x-t))$ gegeben, welches im Kern liegt, und schreibe es als

$$u = a + \sum_{n>0} a_n y^n + \sum_{n>0} b_n z^n + \sum_{n>0} c_n t^n + \sum_{n>0} d_n x t^n + \sum_{n,m>0} e_{nm} y^n t^m + \sum_{n,m>0} f_{nm} z^n t^m.$$

Genauer gesagt handelt es sich hierbei um einen Repräsentanten in $k[x,y,z,t]$. Es gilt dann $u \in (x,y)$ und damit $u(0,0,z,t) = 0$ in $k[x,y,z,t]$, das heißt

$$0 = a + \sum_{n>0} b_n z^n + \sum_{n>0} c_n t^n + \sum_{n,m>0} f_{nm} z^n t^m.$$

Weil die hier vorkommenden Monome disjunkt sind und wir uns im Polynomring befinden, folgt $a = 0$ sowie $b_n = 0$, $c_n = 0$ und $f_{nm} = 0$ für alle $n, m > 0$. Also bleibt

$$u = \sum_{n>0} a_n y^n + \sum_{n>0} d_n x t^n + \sum_{n,m>0} e_{nm} y^n t^m.$$

Wir wissen nun außerdem $u \in (z, x-t)$ und damit $k(x,y,0,x) = 0$ in $k[x,y,z,t]$, das heißt

$$0 = \sum_{n>0} a_n y^n + \sum_{n>0} d_n x x^n + \sum_{n,m>0} e_{nm} y^n x^m.$$

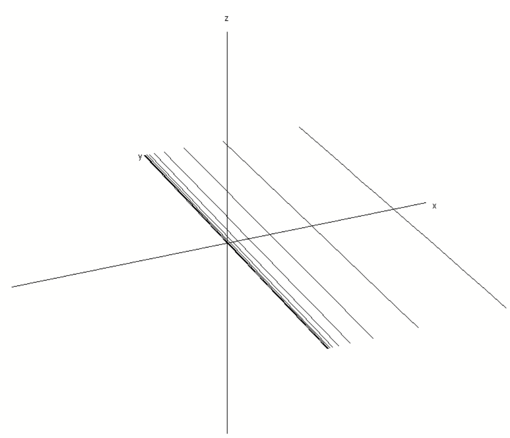
Hier sind wieder alle vorkommenden Monome disjunkt, sodass $a_n = d_n = e_{nm} = 0$ und daher $u = 0$, wie gewünscht.

Was man von diesem Beweis mitnehmen sollte, ist zumindest der folgende Ansatz, um die Gleichheit von zwei Idealen $I, J \subseteq R$ zu zeigen: Wenn man eine Inklusion $I \subseteq J$ bereits kennt, erhält man einen Epimorphismus $R/I \to R/J$ und muss nur noch zeigen, dass dieser ein Isomorphismus ist. Ein Quotient von R ist in der Regel einfacher zu überblicken als R selbst; daher ist dies oftmals sehr nützlich.

(b) Es gilt

$$I_a = (x, y) \cdot (z, x - a) = (xz, x(x - a), yz, y(x - a)),$$

also $X_a = V(x, y) \cup V(z, x-a)$. Es ist $V(x, y)$ die z-Achse $\langle(0, 0, 1)\rangle$ und $V(z, x-a)$ ist die Gerade $(a, 0, 0) + \langle(0, 1, 0)\rangle$, die also eine um a in x-Richtung verschobene y-Achse ist. Weil $(0, 0, 1)$ und $(0, 1, 0)$ linear unabhängig sind, sind die Geraden windschief (das ist für beliebiges k gerade die Definition). Ihr „Abstand" ist offenbar a. Jedenfalls schneiden sie sich nur für $a = 0$ und dann nur im Ursprung $(0, 0, 0)$. Der Schnitt ist offensichtlich transversal, d.h. nicht tangential; weil wir das noch nicht präzise im Kontext der algebraischen Geometrie definiert haben, denke man an den Begriff für Mannigfaltigkeiten (siehe z.B. http://en.wikipedia.org/wiki/Transversality).



(c) Sei zunächst $a \neq 0$. Wir wollen nun zeigen, dass $I_a = (x, y) \cdot (z, x - a)$ mit dem Durchschnitt $(x, y) \cap (z, x - a)$ übereinstimmt. Betrachte dazu wieder den kanonischen Epimorphismus

$$k[x, y, z]/((x, y) \cdot (z, x - a)) \twoheadrightarrow k[x, y, z]/((x, y) \cap (z, x - a)).$$

Aus den Überlegungen von (b) folgt, dass der Quotient links als k-Vektorraum von

$$1, x, y^{\mathbb{N}_{>0}}, z^{\mathbb{N}_{>0}}$$

erzeugt wird. Sei nun $u = b + cx + \sum_{n>0} d_n y^n + \sum_{n>0} e_n z^n$ ein Element im Kern. Dann gilt $u \in (x, y)$, also $0 = u(0, 0, z) = b + \sum_{n>0} e_n z^n$ und damit $b = e_n = 0$ für alle $n > 0$. Es bleibt also $u = cx + \sum_{n>0} d_n y^n$ übrig. Wir wissen noch $u \in (z, x-a)$, also $0 = u(a, y, 0) = ca + \sum_{n>0} d_n y^n$. Es folgt $ca = d_n = 0$ für alle $n > 0$. Wegen $a \neq 0$ ist sogar $c = 0$. Das zeigt $u = 0$, wie gewünscht.

Also ist $I_a = (x, y) \cap (z, x - a)$ ein Durchschnitt von Radikalidealen und damit ebenfalls ein Radikalideal. Für $a = 0$ ist hingegen $I_0 = (xz, x^2, yz, yx)$. Es gilt also $x^2 \in I_0$, und die Annahme $x \in I_0$ führt man wie zu Beginn von (a) zu einem Widerspruch. Es ist also $x \in \sqrt{I_0} \setminus I_0$.

Geometrische Interpretation: Es ist x die Richtung, in der sich die beiden Geraden annähern. Im Grenzwert $a = 0$ gilt $x^2 = 0$, aber $x \neq 0$ im Ring $k[x, y, z]/I_0$. Ein Element x in einem Ring mit dieser Eigenschaft kann man sich übrigens als ein infinitesimal kleines Element vorstellen. Das werden wir später im Zusammenhang mit Tangentialräumen noch vertiefen.

Bemerkung: Ist $\varphi_a : k[x, y, z, t] \mapsto k[x, y, z]$ die Auswertung $t \mapsto a$, so ist per Definition I_a das von $\varphi_a(I)$ erzeugte Ideal. Weil φ nicht injektiv ist, erhält φ i.A. keine Durchschnitte; das haben wir oben sogar für $a = 0$ explizit gesehen. Daher können wir nicht einfach I_a direkt anhand von $I = (x, y) \cap (z, x - t)$ ausrechnen, auch wenn man das gerne tun würde. Die Produktdarstellung ist notwendig, um Erzeuger von I zu finden, die dann durch Anwenden von φ_a Erzeuger von I_a geben. Leider waren diese Rechnungen recht aufwändig, und ich weiß nicht, wie es einfacher geht. Wenn man eine Weile solche Rechnungen angestellt hat und ihrer überdrüssig wird, kann man sie ohne Bedenken einem Computeralgebrasystem wie etwa SINGULAR oder SAGE übergeben.

4. Sei an dieser Stelle k ein beliebiger Körper. Zeigen Sie:

   (a) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von $k[x_1, \dots, x_n]$ hat die Form $\{f : f(P) = 0\}$ für ein $P \in \overline{k}^n$. Diskutieren Sie auch das Beispiel $(x^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[x]$.

   (b) $\star$ Finden Sie damit eine Bijektion

$$\{\text{maximale Ideale von } k[x_1, \dots, x_n]\} \longleftrightarrow \mathbb{A}^n(\overline{k})/\mathrm{Aut}(\overline{k}/k).$$

LÖSUNG: (a) Aus Korollar 1.2.14 aus der Vorlesung folgt, dass $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von k ist. Es gibt daher eine Einbettung $e : k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \hookrightarrow \overline{k}$. Sei $\alpha_i = e(x_i)$. Dann gilt

$$\mathfrak{m} = \ker(k[x_1, \dots, x_n] \to k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \hookrightarrow \overline{k}) = \{f : f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0\}.$$

Zum Beispiel gibt es einen Isomorphismus $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$, der durch $x \mapsto i$ gegeben ist. Es gilt $(x^2 + 1) = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(i) = 0\}$. Man hätte natürlich auch $-i$ wählen können. Dies zeigt, dass der Punkt P mit $\mathfrak{m} = \{f : f(P) = 0\}$ nicht eindeutig bestimmt ist. In Teil (b) werden wir sehen, wann zwei Punkte dasselbe maximale Ideal definieren.

(b) Für jedes $P = (\alpha_i) \in \mathbb{A}^n(\overline{k})$ ist $\mathfrak{m}_P := \{f : f(P) = 0\}$ ein maximales Ideal von $k[x_1, \dots, x_n]$, weil $x_i \mapsto \alpha_i$ nach dem Homomorphiesatz und der universellen Eigenschaft der Polynomalgebra eine Einbettung $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}_P \hookrightarrow \overline{k}$ definiert, deren Bild $k[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Körper ist; beachte dabei, dass die α_i algebraisch sind!

Wir haben in (a) gesehen, dass jedes maximale Ideal auf diese Weise entsteht. Es bleibt daher zu zeigen, dass $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_Q$ genau dann gilt, wenn $Q = \sigma(P)$ für einen Automorphismus σ der Körperweiterung $\overline{k}/k$. Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist einfach:

Wenn wir $P = (\alpha_i)$ schreiben und $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ gegeben ist, so gilt offenbar $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ genau dann, wenn $f(\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_n)) = 0$. Nun sei umgekehrt $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_Q$. Wählen wir Einbettungen der Quotientenringe wie in (a), so sind die Bilder $L_1, L_2 \subseteq \overline{k}$ folglich isomorphe endliche Körperweiterungen von k. Aus der Algebra ist bekannt (siehe z.B. Bosch, *Algebra*, Satz 3.4/9), dass sich jeder solche Isomorphismus zu einem Automorphismus σ von $\overline{k}$ fortsetzen lässt; der Beweis benutzt das Zornsche Lemma. Nach Konstruktion ist $\sigma(P) = Q$.