Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

4. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 30.4.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
bis Freitag: Extrablatt über Dimension bis 1.4.D
bis Dienstag: Den Rest des Extrablattes

2. Skizzieren Sie die folgenden algebraischen Teilmengen von $\mathbb{A}^3(k)$ und bestimmen Sie ihre irreduziblen Komponenten, wobei es eventuell nur eine gibt. Geben Sie außerdem jeweils ohne Beweis die Dimension an.

   (a) $V(x^2 - yz, xz - x)$ (c) $V(x^2 + y^2 - z^2)$
   (b) $V(xy^3z - xz^2 + xz)$ (d) $V(x^2y^2 + x^2z^2 - 1)$

   In (c) und (d) dürfen Sie $\mathrm{char}(k) \neq 2$ annehmen. Ein hervorragendes Programm zur Visualisierung von algebraischen Flächen ist SURFER[1].

   (4 Punkte)

3. In dieser Aufgabe klassifizieren wir ebene algebraischen Mengen.

   (a) Seien $0 \neq f, g \in k[x, y]$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass $V(f) \cap V(g)$ endlich ist. Tipp: Der Hauptidealring $k(x)[y]$ ist nützlich.
   (b) Folgern Sie, dass jede echte irreduzible algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^2(k)$ entweder ein Punkt $\{P\}$ oder eine Kurve $V(f)$ ist, wobei $f \in k[x, y]$ irreduzibel ist.
   (c) Wie sieht demnach eine beliebige ebene algebraische Menge aus?
   (d) Geben Sie mittels (b) einen direkten Beweis von $\dim \mathbb{A}^2(k) = 2$.

   (4 Punkte)

4. Für eine Matrix $M \in M_n(k)$ mit charakteristischem Polynom χ_M besagt der Satz von Cayley-Hamilton $\chi_M(M) = 0$. Beweisen Sie diesen Satz mittels der Zariski-Topologie auf $M_n(k) \cong \mathbb{A}^{n^2}(k)$: Sei $V := \{M \in M_n(k) : \chi_M(M) = 0\}$ und $D := \{M \in M_n(k) : M$ hat n paarweise verschiedene Eigenwerte$\}$.

   (a) Es ist V abgeschlossen und D offen.
   (b) Es gilt $D \subseteq V$.
   (c) Folgern Sie den Satz von Cayley-Hamilton über einem beliebigen Körper.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 2.5. besprochen werden? Formulieren Sie diese und geben Sie sie mit dem Übungsblatt ab. Sie erhalten dafür *(2 Punkte)*

[1] http://www.imaginary-exhibition.com/surfer.php