Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

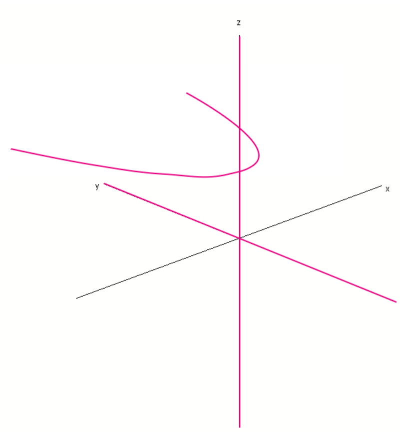
4. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

2. Skizzieren Sie die folgenden algebraischen Teilmengen von $\mathbb{A}^3(k)$ und bestimmen Sie ihre irreduziblen Komponenten, wobei es eventuell nur eine gibt. Geben Sie außerdem jeweils ohne Beweis die Dimension an.

(a) $V(x^2 - yz, xz - x)$
(b) $V(xy^3z - xz^2 + xz)$
(c) $V(x^2 + y^2 - z^2)$
(d) $V(x^2y^2 + x^2z^2 - 1)$

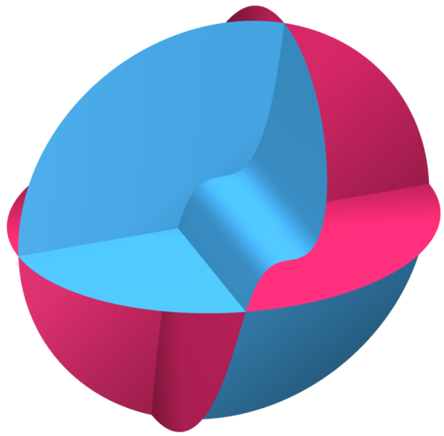
In (c) und (d) dürfen Sie $\mathrm{char}(k) \neq 2$ annehmen. Ein hervorragendes Programm zur Visualisierung von algebraischen Flächen ist Surfer[1].

Lösung: (a) Es gilt $V(x^2 - yz, xz - x) = V(x^2 - yz, x(z-1))$, und das zerlegt sich als $V(x^2 - yz, z-1) \cup V(x^2 - yz, x) = V(x^2 - y, z-1) \cup V(yz, x)$. Die erste Menge beschreibt eine Normalparabel in der Ebene $z = 1$. Sie ist irreduzibel weil $k[x,y,z]/(x^2 - y, z-1) \cong k[x]$ ein Integritätsring ist (das zeigt ebenfalls, dass $(x^2 - y, z-1)$ ein Radikalideal ist, sodass tatsächlich $I(V(x^2 - y, z-1)) = (x^2 - y, z-1)$ nach dem Nullstellensatz). Die zweite Menge ist das y-z-Achsenkreuz in der Ebene $x = 0$. Sie ist nicht irreduzibel, weil $k[x,y,z]/(x, yz) \cong k[y,z]/(yz)$ Nullteiler besitzt. In der Tat können wir sie weiter zerlegen als $V(yz, x) = V(y, x) \cup V(z, x)$ und diese Mengen sind irreduzibel, weil $k[x,y,z]/(y,x) \cong k[z]$ ein Integritätsring ist; dasselbe für $k[x,y,z]/(z,x) \cong k[y]$. Also zerlegt sich $V(x^2 - yz, xz - x)$ in drei irreduzible abgeschlossene Teilmengen, die sich offensichtlich nicht gegenseitig enthalten. Es sind also die irreduziblen Komponenten. Die Dimension ist 1.

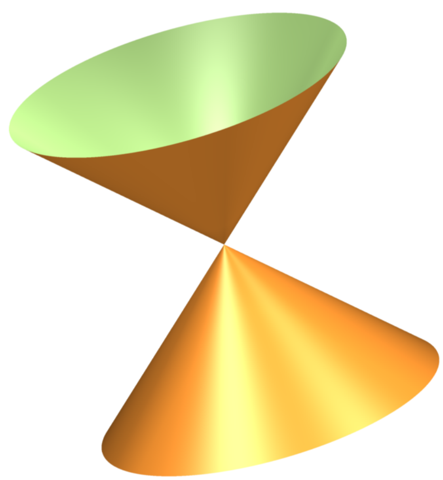


(b) Es gilt $V(xy^3z - xz^2 + xz) = V(xz(y^3 - z + 1)) = V(x) \cup V(z) \cup V(y^3 - z + 1)$. Hierbei ist $V(x)$ irreduzibel weil $k[x,y,z]/(x) \cong k[y,z]$ ein Integritätsring ist; genauso für $V(z)$. Ebenso ist $k[x,y,z]/(y^3 - z + 1) \cong k[x,y]$ ein Integritätsring. Zwischen den Mengen gibt es keine Inklusionsrelationen. Also sind es die irreduziblen Komponenten. Es ist $V(x)$ die y,z-Ebene, $V(z)$ die x,y-Ebene, und $V(y^3 - z + 1)$ ist das Urbild der Kurve $z = y^3 - 1$ unter der Projektion $\mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^2$ auf die y,z-Ebene. Die Dimension ist 2. Es ergibt sich das folgende Bild (erstellt mit Surfer):

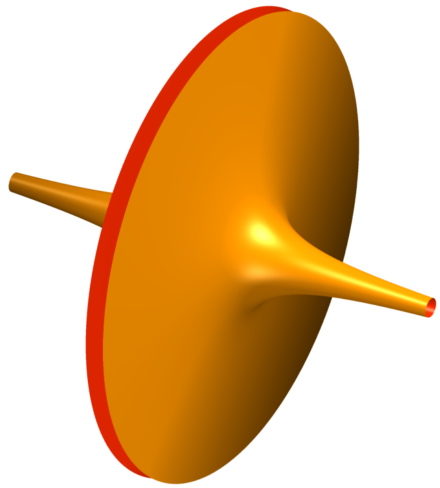
[1] http://www.imaginary-exhibition.com/surfer.php



(c) Es ist $x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + (y + z)(y - z) \in k[y, z][x]$ irreduzibel nach Eisenstein mit dem Primelement $y + z \in k[y, z]$. Wir brauchen $\mathrm{char}(k) \neq 2$, damit $y + z \neq y - z$ (und für $\mathrm{char}(k) = 2$ ist $x^2 + y^2 - z^2 = (x + y + z)^2$). Es ist also $V(x^2 + y^2 - z^2)$ irreduzibel. Um die Menge zu skizzieren, betrachte die Projektion $(a, b, c) \mapsto c$. Das Urbild von c ist dann der Kreis $x^2 + y^2 = c^2$ mit Radius c. Es setzt sich $V(x^2 + y^2 - z^2)$ also aus lauter Kreisen aller Radien zusammen; die Dimension ist 2. Das reelle Bild ist daher ein Doppelkegel (erstellt mit Surfer):



(d) Es ist $x^2y^2 + x^2z^2 - 1 = x^2y^2 + (xz + 1)(xz - 1) \in k[x, z][y]$ irreduzibel nach Eisenstein mit dem Primelement $xz + 1 \in k[x, z]$. Also ist $V(x^2y^2 + x^2z^2 - 1)$ irreduzibel. Die Dimension ist 2. Um die Menge zu skizzieren, betrachte die Projektion $(a, b, c) \mapsto a$. Das Urbild von $a \neq 0$ ist dann der Kreis $y^2 + z^2 = \frac{1}{a^2}$ vom Radius $1/a$. Je kleiner a, desto größer der Radius. Das reelle Bild sieht demnach so aus (erstellt mit Surfer):



3. In dieser Aufgabe klassifizieren wir ebene algebraischen Mengen.

   (a) Seien $0 \neq f, g \in k[x, y]$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass $V(f) \cap V(g)$ endlich ist. Tipp: Der Hauptidealring $k(x)[y]$ ist nützlich.

   (b) Folgern Sie, dass jede echte irreduzible algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^2(k)$ entweder ein Punkt $\{P\}$ oder eine Kurve $V(f)$ ist, wobei $f \in k[x, y]$ irreduzibel ist.

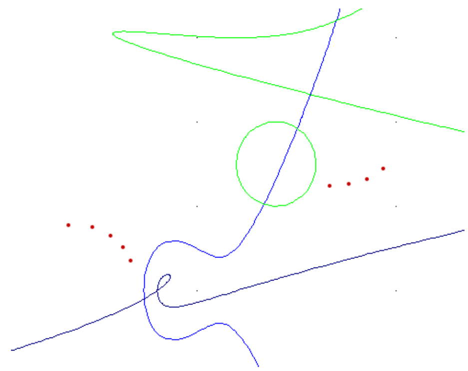
   (c) Wie sieht demnach eine beliebige ebene algebraische Menge aus?

   (d) Geben Sie mittels (b) einen direkten Beweis von $\dim \mathbb{A}^2(k) = 2$.

LÖSUNG: (a) Nach dem Satz von Gauß [Bosch: *Algebra*, Satz 2.7/7] sind f, g auch in $k(x)[y]$ teilerfremd. Weil dies ein Hauptidealring ist, gibt es $u, v \in k(x)[y]$ mit $uf + vg = 1$. Es gibt ein $0 \neq p \in k[x]$ mit $pu, pv \in k[x, y]$. Dann zeigt die Gleichung $(pu)f + (pv)g = p$ in $k[x, y]$, dass für jede gemeinsame Nullstelle (a, b) von f, g auch a eine von p ist, von denen es aber in k nur endlich viele gibt. Für $(a, b) \in V(f) \cap V(g)$ kommen also nur endlich viele a in Frage. Analog sieht man das für b.

(b) Sei $V \subset \mathbb{A}^2(k)$ eine irreduzible algebraische Menge. Finde $0 \neq f_i \in k[x, y]$ mit $V = V(f_1, \ldots, f_r)$. Wenn f_i, f_j einen gemeinsamen Teiler g haben, so ist $V(f_i, f_j) = V(g) \cup V(f_i/g, f_j/g)$. Weil V irreduzibel ist, kann man daher annehmen, dass die f_i paarweise teilerfremd sind. Für $r = 1$ ist $V = V(f_1)$ und wir zerlegen f_1 als Produkt von irreduziblen Polynomen. Da V irreduzibel ist, muss f Potenz eines irreduziblen Polynoms f sein. Dann ist $\sqrt{(f_1)} = (f)$ und $V = V(f)$. Für $r \geq 2$ ist V endlich nach (a), wegen der Irreduzibilität also sogar ein Punkt.

(c) Von $\mathbb{A}^2$ abgesehen besteht jede algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^2$ aus endlich vielen Punkten und Kurven.



(d) Die Kette $V(x,y) \subsetneq V(x) \subsetneq V(0)$ (Punkt $\subsetneq$ Gerade $\subsetneq$ Ebene) hatte uns in der Vorlesung bereits $\dim \mathbb{A}^2(k) \geq 2$ geliefert. Sei nun $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_d$ eine beliebige Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen, mit $V_i \neq V_{i+1}$. Wir wollen $d \leq 2$ zeigen. Ersetze ggf. V_d durch $\mathbb{A}^2$. Dann sind $V_0, \ldots, V_{d-1}$ nach (b) entweder Punkte oder Kurven von der Form $V(f)$ für ein irreduzibles Polynom f. Aus $V(f) \subseteq V(g)$ (mit irreduziblen f, g) folgt allerdings $(g) \subseteq (f)$, also $f|g$, wegen der Irreduzibilität von g also bereits $(f) = (g)$ und damit $V(f) = V(g)$. Ferner ist eine Inklusion der Form $V(f) \subseteq \{P\}$ ausgeschlossen, weil die maximalen Ideale $(x - \alpha, y - \beta)$ von $k[x,y]$ keine Hauptideale sind. Also hat die Kette die Form $\{P\} \subseteq V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ oder sie ist sogar nur ein Teil davon. Die Länge ist in jedem Fall $d \leq 2$.

4. Für eine Matrix $M \in M_n(k)$ mit charakteristischem Polynom χ_M besagt der Satz von Cayley-Hamilton $\chi_M(M) = 0$. Beweisen Sie diesen Satz mittels der Zariski-Topologie auf $M_n(k) \cong \mathbb{A}^{n^2}(k)$: Sei $V := \{M \in M_n(k) : \chi_M(M) = 0\}$ und $D := \{M \in M_n(k) : M \text{ hat } n \text{ paarweise verschiedene Eigenwerte}\}$.

   (a) Es ist V abgeschlossen und D offen.

   (b) Es gilt $D \subseteq V$.

   (c) Folgern Sie den Satz von Cayley-Hamilton über einem beliebigen Körper.

LÖSUNG: Wir benutzen die Identifikation $M_n(k) \cong \mathbb{A}^{n^2}(k)$ und betrachten dazu den Polynomring $k[x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n]$ als Koordinatenring von $\mathbb{A}^{n^2}(k)$. Über $\mathbb{A}^{n^2}(k)$ gibt es die universelle Matrix $M^{\text{univ}} := (x_{ij})_{i,j=1\ldots n} \in M_n\big(k[x_{ij}]\big)$. An dem Punkt $P \in \mathbb{A}^{n^2}(k)$ mit Koordinaten $x_{ij} = a_{ij}$ spezialisiert die universelle Matrix zu $M^{\text{univ}}(P) = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n} \in M_n(k)$.

(a) Die Koeffizienten des char. Polynoms $\chi_M = \det(t1 - M)$ einer jeden Matrix M hängen nur polynomiell von den Einträgen von M ab. Genauer gesagt folgt für die universelle Matrix M^{univ} aus der Leibniz-Formel, dass es ein Polynom $\chi_{M^{\text{univ}}}(t) \in k[x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n][t]$ gibt, nämlich $\det(t1 - (x_{ij}))$, sodass für jede Matrix $M \in M_n(k)$ mit Einträgen (a_{ij}) gilt, dass $\chi_M(t)$ durch Einsetzen von $x_{ij} \mapsto a_{ij}$ aus $\chi(t)$ entsteht. Beim Satz von Cayley-Hamilton setzt man M für t in χ_M ein.

Wir setzen daher die universelle Matrix $M^{\text{univ}} = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ für t in $\chi_{M^{\text{univ}}}$ ein und erhalten eine Matrix $\chi_{M^{\text{univ}}}(M^{\text{univ}}) \in M_n(k[x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n])$. Wenn $\chi_{M^{\text{univ}}}(M^{\text{univ}})_{pq}$ den Eintrag (p,q) davon bezeichnet, so gilt $\chi_{M^{\text{univ}}}(M^{\text{univ}})_{pq} \in k[x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n]$ und nach Konstruktion ist V die Nullstellenmenge all dieser Polynome für $1 \leq p,q \leq n$. Also ist V abgeschlossen.

Das D offen ist liegt daran, dass Gleichheit (von Eigenwerten) eine abgeschlossene Bedingung und Verschiedenheit (von Eigenwerten) eine offene Bedingung ist. Konkreter hat ein Polynom $f \in k[t]$ genau dann lauter paarweise verschiedene Nullstellen, wenn die Diskriminante von f nicht verschwindet, siehe [Bosch: *Algebra*, §4.4]. Sie berechnet sich (universell) polynomiell aus den Koeffizienten von f. Also liegt $M = (a_{ij})$ genau dann in D, wenn die Diskriminante p von χ_M nicht verschwindet. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminante p^{univ} von $\chi_{M^{\mathrm{univ}}}(t)$ nach Einsetzen von $x_{ij} \mapsto a_{ij}$ nicht verschwindet. Also ist D das Komplement von $V(p^{\mathrm{univ}}) \subseteq M_n(k)$ und damit offen.

(b) Für $M \in D$ ist M diagonalisierbar. Wegen $\chi_{S^{-1}MS} = \chi_M$ für $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ können wir annehmen, dass M selbst eine Diagonalmatrix ist, etwa mit der Diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann ist $\chi_M = (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n)$ und es ist $\chi_M(M)$ ein Produkt von n Diagonalmatrizen, wobei der i-te Faktor $M - \lambda_i \mathrm{Id}_n$ eine 0 im Eintrag (i,i) besitzt. Daher ist $\chi_M(M) = 0$.

(c) Wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist, so gehe man zu $\overline{k}$ über. Wenn die polynomielle Gleichung $\chi_M(M) = 0$ über $\overline{k}$ gilt, dann auch über k. Wir können also annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist und die Sprache der algebraischen Geometrie benutzen. Weil $M_n(\overline{k}) \cong \mathbb{A}^{n^2}(\overline{k})$ irreduzibel ist, ist D als nichtleere offene Teilmenge dicht. Es folgt $M_n(\overline{k}) = \overline{D} \subseteq \overline{V} = V$, d.h. jede Matrix $M \in M_n(\overline{k})$ liegt in V.