Algebraische Geometrie | Prof. Dr. Urs Hartl
SoSe 2012 | Martin Brandenburg

5. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 7.5.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Freitag: -
   bis Dienstag: 2.1

2. Zeigen Sie:
   (a) Die Dimension eines Hauptidealringes $\neq 0$ ist entweder 0 oder 1.
   (b) Für eine endliche Familie von Ringen $(R_i)_{i=1\ldots n}$ gilt die Gleichung
   $$\dim\left(\prod_{i=1}^n R_i\right) = \sup\{\,\dim(R_i)\colon\, i = 1\ldots n\}.$$
   (c) Was ist die Dimension von $k[x,y]/(x^2-y^2)$?
   (d) $\star$ Was ist die Dimension von $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_2$?

   (4+2* Punkte)

3. Sei $X := V(xz, yz) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$.
   (a) Skizzieren Sie X und bestimmen Sie $I(X)$.
   (b) Was sind die irreduziblen Komponenten von X? Welche Dimensionen besitzen diese? Was ist folglich die Dimension von X?
   (c) Geben Sie für jede irreduzible Komponente X_i von X eine maximale Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X_i, sowie die zugehörige maximale Kette von Primidealen in $\Gamma(X_i) := k[x,y,z]/I(X_i)$ an.

   (4 Punkte)

4. Sei R ein Ring und $U \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.
   (a) Zeigen Sie $\dim(U^{-1}R) \leq \dim(R)$
   (b) Finden Sie Beispiele, in denen hier Gleichheit bzw. Ungleichheit gilt.
   (c) $\star$ Sei $R = k[x_1, x_2, x_3, \ldots]$ der Polynomring in unendlich vielen Variablen. Betrachten Sie die Primideale $\mathfrak{p}_1 = (x_1)$, $\mathfrak{p}_2 = (x_2, x_3)$, $\mathfrak{p}_3 = (x_4, x_5, x_6)$, $\ldots$. Sei $U = R \backslash \cup_{i\geq 1} \mathfrak{p}_i$. Zeigen Sie, dass $S := U^{-1}R$ unendliche Dimension hat. Bemerkung: Man kann zeigen, dass S trotzdem noethersch ist!

   (3+1+2* Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 9.5. besprochen werden? *(2 Punkte)*