Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

5. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

2. Zeigen Sie:

   (a) Die Dimension eines Hauptidealringes $\neq 0$ ist entweder 0 oder 1.

   (b) Für eine endliche Familie von Ringen $(R_i)_{i=1\ldots n}$ gilt die Gleichung

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{n} R_i\right) = \sup\{\,\dim(R_i)\colon i = 1\ldots n\}.$$

   (c) Was ist die Dimension von $k[x,y]/(x^2-y^2)$?

   (d) $\star$ Was ist die Dimension von $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_2$?

   LÖSUNG: (a) Wenn R ein Körper ist, dann ist (0) das einzige Primideal von R und daher $\dim(R) = 0$. Sei nun R ein Hauptidealring, welcher kein Körper ist. Dann gilt $\dim(R) \geq 1$, denn es gibt ein Primelement $p \in R$ und daher die Primidealkette $(0) \subsetneq (p)$ der Länge 1. Weil in einem Hauptidealring jedes Primideal $\neq 0$ bereits maximal ist, kann es keine längere Kette geben; damit ist $\dim(R) = 1$.

   (b) Die Ideale von $R_1 \times \ldots \times R_n$ haben die Form $I_1 \times \ldots \times I_n$ mit Idealen $I_i \subseteq R_i$. Der Quotient ist isomorph zu $R/I_1 \times \ldots \times R/I_n$. Er ist genau dann ein Integritätsring, wenn es ein i gibt, sodass R/I_i ein Integritätsring ist, und die anderen $R/I_k = 0$ sind. Mit anderen Worten, die Primideale von $R_1 \times \ldots \times R_n$ haben die Form $R_1 \times \ldots \times R_{i-1} \times \mathfrak{p}^{(i)} \times R_{i+1} \times \ldots \times R_n$ mit Primidealen $\mathfrak{p}^{(i)} \subseteq R_i$, wobei $1 \leq i \leq n$. Primideale sind immer echt. Eine Primidealkette in $\prod_i R_i$ korrespondiert dann zu einer Primidealkette in einem R_i. Daraus folgt sofort die Behauptung.

   (c) Die Primidealketten in $k[x,y]/(x^2-y^2)$ korrespondieren zu Primidealketten in $k[x,y]$, deren Primideale x^2-y^2 enthalten. Wegen $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$ enthalten diese $x+y$ oder $x-y$. Im ersten Fall bekommt man eine Primidealkette in $k[x,y]/(x+y) \cong k[x]$ (via $y \mapsto -x$). Dieser Ring hat Dimension 1. Ähnliches bekommt man bei $x-y$. Also hat $k[x,y]/(x^2-y^2)$ die Dimension 1. [Die zugehörige algebraische Menge besteht einfach aus den beiden Geraden $y = x$, $y = -x$; das stimmt also mit der Intuition überein]

   (d) Der Ring $\mathbb{F}_2$ hat die Eigenschaft, dass $x^2 = x$ für alle x. Das vererbt sich dann auf $A = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_2$. Jeder Ring A mit dieser Eigenschaft ist 0-dimensional: Ist $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal, so ist $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring mit derselben Eigenschaft. Dort kann man aber $y^2 = y$ kürzen und erhält $y = 0$ oder $y = 1$. Es gilt daher $A/\mathfrak{p} = \mathbb{F}_2$. Daher ist $\mathfrak{p}$ maximal. Das war zu zeigen.

3. Sei $X := V(xz, yz) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$.

   (a) Skizzieren Sie X und bestimmen Sie $I(X)$.

   (b) Was sind die irreduziblen Komponenten von X? Welche Dimensionen besitzen diese? Was ist folglich die Dimension von X?

(c) Geben Sie für jede irreduzible Komponente X_i von X eine maximale Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X_i, sowie die zugehörige maximale Kette von Primidealen in $\Gamma(X_i) := k[x, y, z]/I(X_i)$ an.

Lösung: (a) Es gilt $X = V(z) \cup V(x, y)$. Die Menge $X_1 = V(z)$ ist die x, y-Ebene, und $X_2 = V(x, y)$ ist die z-Achse. Also X_2 ist eine Gerade, die die Ebene X_1 transversal schneidet und $X = X_1 \cup X_2$. Das Bild ist also klar. Es gilt $I(X_1) = (z)$, weil (z) ein Radikalideal ist. Ähnlich gilt $I(X_2) = (x, y)$. Es folgt $I(X) = (z) \cap (x, y)$. Wir vermuten $I(X) = (z) \cdot (x, y) = (xz, yz)$ und rechnen das wie auf Blatt 3 nach: Die Inklusion $(xz, yz) \subseteq (z) \cap (x, y)$ ist klar, daher bekommt man einen Epimorphismus

$$\varphi : k[x, y, z]/(xz, yz) \twoheadrightarrow k[x, y, z]/((z) \cap (x, y)).$$

Der Quotient links wird als k-Vektorraum erzeugt von

$$1, x^{\mathbb{N}>0}, y^{\mathbb{N}>0}, z^{\mathbb{N}>0}, x^{\mathbb{N}>0}y^{\mathbb{N}>0}.$$

Ein Element im Kern wird dann durch ein Polynom der Form

$$u = a + \sum_i b_i x^i + \sum_i c_i y^i + \sum_i d_i z^i + \sum_{i,j} e_{i,j} x^i y^j$$

repräsentiert. Wenn es im Kern liegt, folgt $u(x, y, 0) = 0$ in $k[x, y, z]$ und daher $a = b_i = c_i = e_{i,j} = 0$, also $u = \sum_i d_i z^i$. Aus $u(0, 0, z) = 0$ folgt dann weiter $u = 0$, wie gewünscht.

(b) X_1 ist irreduzibel weil $k[x, y, z]/(z) \cong k[x, y]$ ein Integritätsring ist; X_2 ist ebenfalls irreduzibel weil $k[x, y, z]/(x, y) \cong k[z]$ ein Integritätsring ist. Es gilt $\dim(X_1) = \dim(k[x, y]) = 2$ und $\dim(X_2) = \dim(k[z]) = 1$. Es gilt weder $X_1 \subseteq X_2$ noch $X_2 \subseteq X_1$; daher sind X_1, X_2 die irreduziblen Komponenten von X. Die Dimension von X ist $\sup(\dim(X_1), \dim(X_2)) = 2$.

(c) Die maximale Primidealkette $(0) \subsetneq (x) \subsetneq (x, y)$ in $k[x, y] \cong \Gamma(X_1)$ beziehungsweise $(z) \subseteq (x, z) \subseteq (x, y, z)$ in $k[x, y, z]$ über $I(X_1)$ korrespondiert zur maximalen Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen

$$\{\text{Ursprung}\} \subsetneq \text{y-Achse} \subsetneq \text{x,y-Ebene}$$

von X_1. Die maximale Primidealkette $(0) \subseteq (z)$ in $k[z] \cong \Gamma(X_2)$ beziehungsweise $(x, y) \subseteq (x, y, z)$ in $k[x, y, z]$ über $I(X_2)$ korrespondiert zur maximalen Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen $\{\text{Ursprung}\} \subsetneq$ z-Achse in X_2.

4. Sei R ein Ring und $U \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

(a) Zeigen Sie $\dim(U^{-1}R) \leq \dim(R)$

(b) Finden Sie Beispiele, in denen hier Gleichheit bzw. Ungleichheit gilt.

(c) $\star$ Sei $R = k[x_1, x_2, x_3, \dots]$ der Polynomring in unendlich vielen Variablen. Betrachten Sie die Primideale $\mathfrak{p}_1 = (x_1)$, $\mathfrak{p}_2 = (x_2, x_3)$, $\mathfrak{p}_3 = (x_4, x_5, x_6)$, ... Sei $U = R \backslash \cup_{i \geq 1} \mathfrak{p}_i$. Zeigen Sie, dass $S := U^{-1}R$ unendliche Dimension hat. Bemerkung: Man kann zeigen, dass S trotzdem noethersch ist!

LÖSUNG:

(a) folgt leicht aus Proposition 1.4.B: Sei $\rho : R \to U^{-1}R$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ der kanonische Homomorphismus. Ist $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{P}_\ell \subset U^{-1}R$ eine Primidealkette in $U^{-1}R$, dann ist $\rho^{-1}\mathfrak{P}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \rho^{-1}\mathfrak{P}_\ell \subset R$ eine Primidealkette in R. Daher gilt $\ell \leq \dim R$. Die Dimension $\dim(U^{-1}R)$ ist, als Supremum all dieser ℓ auch $\leq \dim R$.

(b) Wenn R ein Integritätsring positiver Dimension (z.B. $\mathbb{Z}$) mit Quotientenkörper K ist, dann gilt $\dim(K) = 0 < \dim(R)$. Ist R ein Hauptidealring mit mindestens zwei (nicht-assoziierten) Primelementen und $p \in R$ ein Primelement, so ist $\dim(R) = \dim(R_p) = 1$ nach Aufgabe 2.

(c) Nach 1.4.B korrespondieren die Primideale von S zu den Primidealen in R, die in $\cup_{i\geq 1}\mathfrak{p}_i$ enthalten sind. Dazu gehören insbesondere die Primideale $\mathfrak{p}_n$ selbst. Es gibt aber eine Primidealkette der Länge n, die mit $\mathfrak{p}_n$ endet. Somit gibt es beliebige lange Primidealketten, d.h. es gilt $\dim(S) = \infty$.

Bemerkung: Es ist nicht so einfach, zu zeigen, dass S noethersch ist. Dieses Beispiel stammt von NAGATA. Man findet es in seinem berühmten Buch *Local rings* von 1962.