

6. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 14.5.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
bis Freitag: 2.2
bis Dienstag: 2.3
2. Sei X eine affine Varietät und $A(X)$ der zugehörige Koordinatenring. Finden Sie inklusionsumkehrende Bijektionen

$$\begin{aligned}\{\text{Radikalideale von } A(X)\} &\leftrightarrow \{\text{Abgeschlossene Teilmengen von } X\} \\ \{\text{Primideale von } A(X)\} &\leftrightarrow \{\text{Untervarietäten von } X\} \\ \{\text{Maximalideale von } A(X)\} &\leftrightarrow \{\text{Punkte von } X\}\end{aligned}$$

(4 Punkte)

3. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass durch

$$\mathcal{F}(U) := \{s : U \rightarrow \mathbb{R} \mid s \text{ ist beschränkt}\}$$

eine Prägarbe \mathcal{F} definiert wird, welche im allgemeinen keine Garbe ist (durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels). Wie kann man die Definition etwas abändern, damit es eine Garbe wird? (4 Punkte)

4. Betrachten Sie die affinen Varietäten $X = V(x)$, $X' = V(y^2 - x^3)$ sowie $X'' = V(y^2 - x^2(x+1))$ im $\mathbb{A}^2(k)$.
 - (a) Zeigen Sie, dass der Körper der rationalen Funktionen jeweils zu $k(t)$ isomorph ist, wobei t eine Unbestimmte ist.
 - (b) Der Punkt $P = (0, 0)$ liegt in allen drei Varietäten. Zeigen Sie für die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,P} \not\cong \mathcal{O}_{X',P}$ sowie $\mathcal{O}_{X,P} \not\cong \mathcal{O}_{X'',P}$.
 - (c) \star Es gilt ebenfalls $\mathcal{O}_{X',P} \not\cong \mathcal{O}_{X'',P}$.

Fazit: Der lokale Ring weiß mehr als der Körper der rationalen Funktionen. (4+2* Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 16.5. besprochen werden? (2 Punkte)