Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

6. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

2. Sei X eine affine Varietät und $A(X)$ der zugehörige Koordinatenring. Finden Sie inklusionsumkehrende Bijektionen

$$\begin{aligned} \{\text{Radikalideale von } A(X)\} &\leftrightarrow \{\text{Abgeschlossene Teilmengen von } X\} \\ \{\text{Primideale von } A(X)\} &\leftrightarrow \{\text{Untervarietäten von } X\} \\ \{\text{Maximalideale von } A(X)\} &\leftrightarrow \{\text{Punkte von } X\} \end{aligned}$$

LÖSUNG: Zunächst eine Vorbemerkung: Ein Isomorphismus von partiellen Ordnungen $f : S \to T$ schränkt sich zu einem Isomorphismus $f : S_{\geq s} \to T_{\geq f(s)}$ ein, wobei $s \in S$. Für T^{op} erhält man eine entsprechnde Aussage für Anti-Isomorphismen.

Für $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ wende das auf den bereits aus Korollar 1.2.8 bekannten Anti-Isomorphismus

$$\{\text{Abgeschlossene Teilmengen von } \mathbb{A}^n(k)\} \leftrightarrow \{\text{Radikalideale von } k[x_1, \ldots, x_n])\}$$

an, das liefert uns also einen Anti-Isomorphismus

$$\{\text{Abg. Teilm. von } X\} \leftrightarrow \{\text{Radikalideale } J \subseteq k[x_1, \ldots, x_n] \text{ mit } I(X) \subseteq J\}.$$

Die partielle Ordnung auf der rechten Seite ist aber isomorph zur partiellen Ordnung der Radikalideale von $k[x_1, \ldots, x_n]/I(X) = A(X)$. Für die entsprechende Aussage zu Primidealen gehe unter Benutzung von Prop. 1.3.2 genauso vor. Die Aussage über Maximalideale folgt formal: Ist $f : S \to T$ ein Isomorphismus von partiellen Ordnung, so schränkt sich dieser zu einem Isomorphismus $S_{\max} \to T_{\max}$ ein, wobei $S_{\max} \subseteq S$ die Teilordnung der maximalen Ideale bezeichnet.

Natürlich kann man das ganze hier auch per Hand nachrechnen. Die Bijektionen lauten dann

$$\begin{aligned} I &\longmapsto \{P \in X : f(P) = 0 \ \forall \ f \in I\} \\ \{f \in A(X) : f(P) = 0 \ \forall \ P \in V\} &\longleftarrow V \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass ein großer Teil der geometrischen Information der affinen Varietät bereits im Koordinatenring, also einem algebraischen Objekt, enthalten ist. In der Vorlesung werden wir bald sehen, wie in der Tat *jedem* Ring ein geometrisches Gebilde zugeordnet werden kann.

3. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass durch

$$\mathcal{F}(U) := \{s : U \to \mathbb{R} \mid s \text{ ist beschränkt}\}$$

eine Prägarbe $\mathcal{F}$ definiert wird, welche im allgemeinen keine Garbe ist (durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels). Wie kann man die Definition etwas abändern, damit es eine Garbe wird?

LÖSUNG: Die Funktionen nach $\mathbb{R}$ ohne weitere Bedingungen bilden natürlich eine Garbe. Daher reicht es zu testen, dass für $s : U \to \mathbb{R}$ und $W \subseteq U$ gilt: Wenn s beschränkt ist, dann auch $s|_W$. Das ist aber klar: Wenn s durch $C \geq 0$ beschränkt ist, dann auch $s|_W$ durch dieselbe Konstante. Also ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe. Weil Beschränktheit keine lokale Bedingung ist, wird $\mathcal{F}$ aber keine Garbe sein. In der Tat, betrachte etwa $X = \mathbb{R}$ und auf jeder der offenen Mengen $]-n, n[$ die Funktion $x \mapsto x$ als Schnitt in $\mathcal{F}(]-n, n[)$. Diese Schnitte stimmen auf den Durchschnitten überein, verkleben aber nicht zu einem globalen Schnitt auf $\cup_n]-n, n[= \mathbb{R}$, weil dies die Funktion $x \mapsto x$ auf ganz $\mathbb{R}$ sein müsste, welcher aber nicht beschränkt ist.

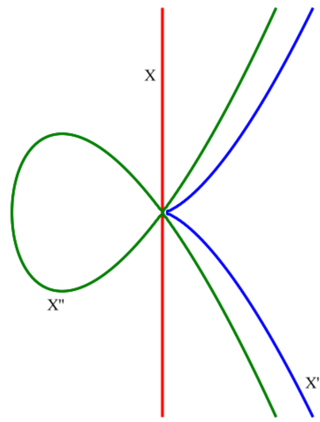
Man kann $\mathcal{F}$ zu einer Garbe $\mathcal{F}'$ abändern, indem man $\mathcal{F}'(U)$ als die Menge der *lokal* beschränkten Funktionen $s : U \to \mathbb{R}$ definiert. Dabei heißt s lokal beschränkt, wenn es für jedes $x \in U$ eine (kleine) offene Umgebung $x \in W \subseteq U$ gibt, sodass $s|_W$ beschränkt ist. Weil dies eine lokale Bedingung ist, ist leicht einzusehen, dass $\mathcal{F}'$ tatsächlich eine Garbe ist. Ist nämlich $U = \cup_i U_i$ eine offene Überdeckung und sind $s_i : U_i \to \mathbb{R}$ lokal beschränkte Funktionen, die auf den Durchschnitten übereinstimmen, so verkleben diese zu einer eindeutigen Funktion $s : U \to \mathbb{R}$ mit $s|_{U_i} = s_i$, und diese ist lokal beschränkt: Für jedes $x \in U$ gibt es ein i mit $x \in U_i$, sodass also $s|_{U_i} = s_i$ und damit s in einer offenen Umgebung von x beschränkt ist.

Bemerkung: Es gibt eine allgemeine Konstruktion, aus einer Prägarbe $\mathcal{F}$ (auf best mögliche Weise) eine Garbe $\mathcal{F}'$ zu konstruieren. Diese Konstruktion wird später bei Gathmann in Abschnitt 7.1 behandelt. Dies hier stellt ein konkretes Beispiel dar.

4. Betrachten Sie die affinen Varietäten $X = V(x)$, $X' = V(y^2 - x^3)$ sowie $X'' = V(y^2 - x^2(x+1))$ im $\mathbb{A}^2(k)$.
   (a) Zeigen Sie, dass der Körper der rationalen Funktionen jeweils zu $k(t)$ isomorph ist, wobei t eine Unbestimmte ist.
   (b) Der Punkt $P = (0,0)$ liegt in allen drei Varietäten. Zeigen Sie für die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,P} \not\cong \mathcal{O}_{X',P}$ sowie $\mathcal{O}_{X,P} \not\cong \mathcal{O}_{X'',P}$.
   (c) $\star$ Es gilt ebenfalls $\mathcal{O}_{X',P} \not\cong \mathcal{O}_{X'',P}$.

Fazit: Der lokale Ring weiß mehr als der Körper der rationalen Funktionen.

LÖSUNG: Zunächst einmal sollte man das folgende Bild im Hinterkopf haben:



Die Koordinatenringe lauten

$$\begin{array}{rcl} A(X) & = & k[x,y]/(x) = k[y] \\ A(X') & = & k[x,y]/(y^2 - x^3) \\ A(X'') & = & k[x,y]/(y^2 - x^2(x+1)) \end{array}$$

(a) Der Körper der rationalen Funktionen ist einfach der Quotientenkörper des Koordinatenringes. Es ergibt sich daher $K(X) = k(t)$ (mit $t = y$). Um $K(X')$ zu bestimmen, betrachte das Element $t = \frac{y}{x} \in K(X')$. Aus der Relation $y^2 = x^3$ folgt leicht $t^2 = x$ sowie $t^3 = y$. Daher wird $K(X')$ als Körpererweiterung bereits von t erzeugt. Es ist ersichtlich, dass t transzendent über k ist; sonst wäre nämlich x algebraisch über k und das führt man mittels der k-Basis $x^{\mathbb{N}} \cup x^{\mathbb{N}}y$ von $A(X')$ leicht zum Widerspruch. Das bedeutet $K(X') = k(t)$. Ähnlich kann man für X'' vorgehen, hier setzt man ebenfalls $t = \frac{y}{x}$ und erhält $t^2 = x+1$, also $y = tx = t^3 - t$, womit wir $K(X'') = k(t)$ sehen.

(b) Für beliebiges Y sei $\mathfrak{m}_P \subseteq \mathcal{O}_{Y,P}$ das maximale Ideal in dem lokalen Ring. Der Trick ist nun, sich jeweils den k-Vektorraum $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ anzuschauen, den wir einmal mit $T_P^*(Y)$ bezeichnen. Wenn $\mathfrak{n}$ das zu P gehörige maximale Ideal in $A(Y)$ bezeichnet (siehe Aufgabe 2), so ist $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, $[a] \mapsto [\frac{a}{1}]$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen (siehe unten).

Für X ergibt sich $\mathfrak{n} = (x,y) = (y)$, $\mathfrak{n}^2 = (y)^2 = (y^2)$, und eine k-Basis von $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ ist durch y gegeben. Also gilt $\dim_k T_P^*(X) = 1$.

Für X' ergibt sich $\mathfrak{n} = (x,y)$, $\mathfrak{n}^2 = (x^2, xy, y^2)$, was sich wegen der Relation $y^2 = x^3$ nun aber zu (x^2, xy) vereinfacht. Eine k-Basis von $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ ist dann durch x, y gegeben, sodass also $\dim_k T_P^*(X') = 2$. Dieselbe Überlegung kann man für X'' anstellen, auch hier folgt $\dim_k T_P^*(X'') = 2$.

Ein Isomorphismus $\mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{O}_{X',P}$ würde nun $T_P^*(X) \cong T_P^*(X')$ nach sich ziehen, was aufgrund der Dimension nicht passt. Dasselbe Argument für X''.

Bemerkung: $T_P^*(Y)$ ist der Kotangentialraum der Varietät Y im Punkte P; wir werden diesen in der Vorlesung noch genauer studieren. Wir haben das lokale

Verhalten von X', X'' also von dem von X durch die „Tangentenanzahl“ unterscheiden können. Das sieht man besonders schön an den Bildern. Wogegen X nur eine „Tangentenrichtung“ in P hat, besitzen X' und X'' jeweils zwei.

(c) Hier reicht eine lineare Approximation durch Tangenten nicht aus; man braucht auch quadratische Terme. Genauer:

Für einen lokalen Ring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ kann man den sogenannten assoziierten graduierten Ring

$$\widetilde{A} = A/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$$

betrachten. Die Multiplikation in $\widetilde{A}$ ist von derjenigen in A induziert. Genauer gesagt ist für $[a] \in \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ und $[b] \in \mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$ die Restklasse des Produktes $[ab] \in \mathfrak{m}^{i+j}/\mathfrak{m}^{i+j+1}$ wohldefiniert. Dies definiert die Multiplikation auf $\widetilde{A}$.

Wenn zwei lokale Ringe isomorph sind, dann sind auch ihre assoziierten graduierten Ringe isomorph. Es reicht daher zu zeigen, dass

$$\widetilde{\mathcal{O}_{X',P}} \not\cong \widetilde{\mathcal{O}_{X'',P}}.$$

In $\widetilde{\mathcal{O}_{X',P}}$ haben wir das Element $[x] \neq 0$ in $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, dessen Quadrat $[x]^2$ in $\mathfrak{m}_P^2/\mathfrak{m}_P^3$ verschwindet, denn es gilt $x^2 = y^3 \in \mathfrak{m}_P^3$. In $\widetilde{\mathcal{O}_{X'',P}}$ gilt allerdings für jedes Element t in $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, dass aus $t^2 = 0$ in $\mathfrak{m}_P^2/\mathfrak{m}_P^3$ schon folgt $t = 0$: Schreibe $t = [ax + by]$ mit $a, b \in k$. Wenn $t^2 = 0$ in $\mathfrak{m}_P^2/\mathfrak{m}_P^3$, so bedeutet dies, dass

$$(ax + by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (a^2 + b^2)x^2 + 2abxy + b^2x^3$$

im Ideal

$$\mathfrak{m}_P^3 = (x^2, xy)(x, y) = (x^3, x^2y, xy^2) = (x^3, x^2y)$$

enthalten ist. Dies geht nur, wenn $a = b = 0$, also $t = 0$.

Bemerkung: Es gibt auch ad hoc algebraische Beweise für (b) und (c), allerdings sind diese noch länger.

Wir zeigen noch, dass $\alpha : \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, $[a] \mapsto [\frac{a}{1}]$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen ist. Zur Surjektivität sei $\frac{a}{s} \in \mathfrak{m}_P$ mit $a \in \mathfrak{n}$ und $s \notin \mathfrak{n}$ gegeben. Weil $A(Y)/\mathfrak{n}$ ein Körper ist, gibt es ein $r \in A(Y) \setminus \mathfrak{n}$ mit $rs - 1 \in \mathfrak{n}$. Es folgt

$$\tfrac{ar}{1} = \tfrac{ars}{s} = \tfrac{a}{s} + \tfrac{a(rs-1)}{s}.$$

Der letzte Summand liegt in $\mathfrak{m}_P^2$, sodass $[\frac{a}{s}] = [\frac{ar}{1}] = \alpha([ar])$ in $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Um zu sehen, dass α injektiv ist, sei $a \in \mathfrak{n}$ mit $\frac{a}{1} = \sum_i \frac{a_i}{s_i} \frac{b_i}{s_i'} \in \mathfrak{m}_P^2$, wobei $a_i, b_i \in \mathfrak{n}$. Bringt man alles auf einen gemeinsamen Nenner, so ist $\frac{a}{1} = \frac{c}{s}$ mit $c \in \mathfrak{n}^2$. Nach Definition der Lokalisierung gibt es ein $\tilde{s} \notin \mathfrak{n}$ mit $as\tilde{s} = c\tilde{s} \in \mathfrak{n}^2$. Wählen wir wieder ein r mit $1 - rs\tilde{s} \in \mathfrak{n}$, so folgt $a = a(1 - rs\tilde{s}) + cr\tilde{s} \in \mathfrak{n}^2$. [Mit Tensorprodukten lässt sich der Beweis schneller führen.]