Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

7. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 21.5.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Freitag: 2.3 + 2.F
   bis Dienstag: -

2. Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Zeigen Sie, dass der Kreis $V(x^2 + y^2 - 1)$ zur Hyperbel $V(xy - 1)$ isomorph ist. Ist die Parabel $V(y - x^2)$ ebenfalls zur Hyperbel isomorph? *(4 Punkte)*

3. Betrachten Sie den Morphismus $f : \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^2(k)$, $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$ und $X := V(y^2 - x^2(x + 1))$. Zeigen Sie:
   (a) Es schränkt sich f zu einem surjektiven Morphismus $f : \mathbb{A}^1(k) \to X$ ein.
   (b) Der induzierte Homomorphismus $f^* : A(X) \to A(\mathbb{A}^1) = k[t]$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
   (c) Immerhin ist der induzierte Homomorphismus auf den Lokalisierungen $A(X)_x \to k[t]_{t^2-1}$ ein Isomorphismus.
   (d) Folgern Sie, dass f zwar kein Isomorphismus ist, sich aber zumindest zu einem Isomorphismus $\mathbb{A}^1(k) \setminus \{\pm 1\} \to X \setminus \{(0, 0)\}$ einschränkt. Was passiert hier geometrisch?

   (4 Punkte)

4. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäten und $f^* : A(Y) \to A(X)$ der induzierte Homomorphismus auf den Koordinatenringen. Finden Sie sämtliche geltende Implikationen zwischen den folgenden Aussagen und beweisen Sie diese. Geben Sie für jede nicht geltende Implikation ein Gegenbeispiel an.

1) f ist injektiv	2) f^* ist surjektiv
3) f ist surjektiv	4) f^* ist injektiv
5) f ist bijektiv	6) f^* ist bijektiv

   (4 Punkte)

5. $\star$ Die durch n Punkte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ *gelochte affine Gerade* ist definiert durch $X_\alpha = D(f_\alpha) = \mathbb{A}^1(k) \setminus V(f_\alpha)$, wobei $f_\alpha := (t - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (t - \alpha_n) \in k[t]$. Kann eine durch n Punkte gelochte affine Gerade zu einer durch m Punkte gelochten affinen Geraden isomorph sein, wenn $n \neq m$? Hinweis: Betrachten Sie die abelsche Gruppe $A(X_\alpha)^*/k^*$. *($4^\star$ Punkte)*

6. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 23.5. besprochen werden? *(2 Punkte)*