Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

7. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

2. Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Zeigen Sie, dass der Kreis $V(x^2+y^2-1)$ zur Hyperbel $V(xy-1)$ isomorph ist. Ist die Parabel $V(y-x^2)$ ebenfalls zur Hyperbel isomorph?

   LÖSUNG: Für den ersten Teil müssen wir $k[x,y]/(x^2+y^2-1) \cong k[x,y]/(xy-1)$ zeigen. Zunächst einmal liefert $x \mapsto x$, $y \mapsto iy$, wobei $i \in k$ ein Element mit $i^2 = -1$ ist, einen Automorphismus von $k[x,y]$, welcher x^2+y^2-1 auf x^2-y^2-1 abbildet. Er liefert daher einen Isomorphismus von k-Algebren $k[x,y]/(x^2+y^2-1) \cong k[x,y]/(x^2-y^2-1)$. Nun gilt $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$. Also liefert $x \mapsto x+y$, $y \mapsto x-y$ einen Automorphismus von $k[x,y]$, welcher $xy-1$ auf x^2-y^2-1 abbildet. Er liefert daher einen Isomorphismus von k-Algebren $k[x,y]/(xy-1) \cong k[x,y]/(x^2-y^2-1)$. Also ist die Hyperbel zum Kreis isomorph.

   Wenn die Parabel zur Hyperbel isomorph wäre, wäre $k[x] = k[x,y]/(y-x^2)$ als k-Algebra zu $k[x,y]/(xy-1)$ isomorph. Insbesondere bildet ein solcher Isomorphismus die Einheitengruppen $k[x]^*$ und $\big(k[x,y]/(xy-1)\big)^*$ isomorph aufeinander ab. Auf der linken Seite ist $k[x]^* = k^*$ aber bereits die gesamte Einheitengruppe. Auf der rechten Seite nicht, zum Beispiel ist x eine Einheit, die nicht in k^* liegt.

3. Betrachten Sie den Morphismus $f : \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^2(k)$, $t \mapsto (t^2-1, t^3-t)$ und $X := V(y^2 - x^2(x+1))$. Zeigen Sie:

   (a) Es schränkt sich f zu einem surjektiven Morphismus $f : \mathbb{A}^1(k) \to X$ ein.

   (b) Der induzierte Homomorphismus $f^* : A(X) \to A(\mathbb{A}^1(k)) = k[t]$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

   (c) Immerhin ist der induzierte Homomorphismus auf den Lokalisierungen $A(X)_x \to k[t]_{t^2-1}$ ein Isomorphismus.

   (d) Folgern Sie, dass f zwar kein Isomorphismus ist, sich aber zumindest zu einem Isomorphismus $\mathbb{A}^1(k) \setminus \{\pm 1\} \to X \setminus \{(0,0)\}$ einschränkt. Was passiert hier geometrisch?

   LÖSUNG: (a) Für alle $t \in k$ gilt $f(t) \in X$, denn

   $$(t^3-t)^2 - (t^2-1)^2(t^2-1+1) = (t(t^2-1))^2 - (t^2-1)^2 t^2 = 0.$$

   Ist umgekehrt $(a,b) \in X$, so gilt entweder $a = 0$ und damit $b = 0$, also $(a,b) = f(1) = f(-1)$, oder $a \neq 0$ und für $t := \frac{b}{a}$ gilt $t^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} - 1 = \frac{a^2(a+1)}{a^2} - 1 = a$ sowie $t^3 - t = t(t^2-1) = ta = b$, also $(a,b) = f(t)$.

(b) Der Homomorphismus $f^* : A(X) \to A(\mathbb{A}^1(k))$ ist durch

$$\begin{array}{rcl} k[x,y]/(y^2 - x^2(x+1)) & \to & k[t] \\ x & \mapsto & t^2 - 1 \\ y & \mapsto & t^3 - t \end{array}$$

gegeben. Um die Injektivität zu zeigen, nehmen wir uns ein Element im Kern, etwa

$$u = \sum_{i \geq 0} a_i x^i + \sum_{j > 0} b_j x^i y.$$

In $k[t]$ folgt dann

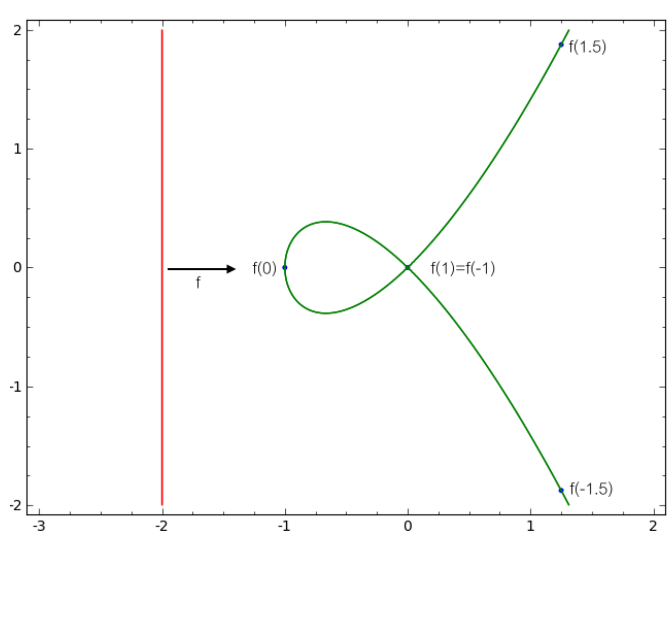
$$0 = \sum_{i \geq 0} a_i (t^2 - 1)^i + \sum_{j > 0} b_j (t^2 - 1)^{j+1} t.$$

Der erste Summand enthält nur Monome in t von geradem Grad; der zweite nur solche von ungeradem Grad. Also verschwinden beide Summanden. Weil $t^2 - 1$ transzendent über k ist (jedes Element in $k[t] \setminus k$ ist transzendent über k), folgt dann $a_i = 0$ und $b_j = 0$ für alle i, j, also $u = 0$. Es kann aber f^* nicht surjektiv sein: Es gilt $f(-1) = f(1) = (0, 0)$, also ist f kein Isomorphismus, und damit auch nicht f^*.

(c) Es gilt $f^*(x) = t^2 - 1$. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung zeigt, dass f^* einen Homomorphismus $A(X)_x \to k[t]_{t^2-1}$ induziert. Er ist injektiv, weil es f^* ist. Nun ist er aber auch surjektiv, weil nämlich $t = \frac{t^3 - t}{t^2 - 1}$ das Bild von $\frac{y}{x}$, und $\frac{1}{t^2-1}$ das Bild von $\frac{1}{x}$ ist.

(d) Es ist $k[t]_{t^2-1}$ der Koordinatenring der offenen, affinen Untervarietät $D(t^2 - 1) = \mathbb{A}^1 \setminus V(t^2 - 1) = \mathbb{A}^1 \setminus \{\pm 1\}$ von $\mathbb{A}^1$, und $A(X)_x$ ist der Koordinatenring der offenen, affinen Untervarietät $D(x) = X \setminus V(x) = X \setminus \{(0, 0)\}$ von X. Mit (b), (c) folgt daher die Behauptung.

Geometrisch passiert hier folgendes: Der Morphismus $f : \mathbb{A}^1(k) \to X$ „wickelt“ die affine Gerade auf die nodale Kurve ab. Die Aussage in (c) zeigt, dass die nodale Kurve durch Identifikation der beiden Punkte ± 1 aus der affinen Geraden entsteht. Außerhalb dieser Punkte ist f ein Isomorphismus.



4. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäten und $f^* : A(Y) \to A(X)$ der induzierte Homomorphismus auf den Koordinatenringen. Finden Sie sämtliche Implikationen zwischen den folgenden Aussagen. Für jede nicht vorhandene Implikation muss ein Gegenbeispiel angegeben werden.

1) f ist injektiv	2) f^* ist surjektiv
3) f ist surjektiv	4) f^* ist injektiv
5) f ist bijektiv	6) f^* ist bijektiv

LÖSUNG: Triviale Implikationen sind 5) $\Rightarrow$ 1), 3) und 6) $\Rightarrow$ 2), 4). Aus der Vorlesung ist bereits 6) $\Rightarrow$ 5) bekannt. Es gibt noch zwei weitere Implikatonen:

Nach Satz 2.3.4 besteht eine Bijektion $X \longrightarrow \{\text{maximale Ideale } \mathfrak{m} \subset A(X)\}$, $P \mapsto \{g \in A(X) : g(P) = 0\}$, unter der f der Abbildung $\mathfrak{m} \mapsto (f^*)^{-1}(\mathfrak{m})$ entspricht.

2) $\Rightarrow$ 1): Ist f^* surjektiv, so ist jedes (maximale) Ideal $\mathfrak{m} \subset A(X)$ durch sein Urbild $(f^*)^{-1}(\mathfrak{m})$ unter f^* bereits eindeutig bestimmt. Es ist nämlich $\mathfrak{m} = f^*\big((f^*)^{-1}(\mathfrak{m})\big)$.

3) $\Rightarrow$ 4): Betrachte $f^* : A(Y) \to A(X)$. Die maximalen Ideale von $A(Y)$, welche Urbilder von maximalen Idealen von $A(X)$ sind, enthalten alle $\ker(f^*)$. Die zugehörigen Punkte liegen daher alle in $V(\ker f^*)$. Wenn f surjektiv ist, folgt also $Y = V(\ker(f^*))$ und damit $\ker(f^*) \subseteq \sqrt{0} = 0$.

Aus diesen Implikationen folgt auch 5) $\Rightarrow$ 4) und 6) $\Rightarrow$ 1), 3).

Alle anderen Implikationen gelten nicht:

5) $\not\Rightarrow$ 6) und 5) $\not\Rightarrow$ 2): Dies ist Beispiel 2.3.5 c) der Vorlesung.

1) $\not\Rightarrow$ 2), sowie 4) $\not\Rightarrow$ 2), sowie 4) $\not\Rightarrow$ 3), sowie 4) $\not\Rightarrow$ 5): Man nehme eine offene Untervarietät, wie zum Beispiel $f : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1$. Hier ist f injektiv, nicht surjektiv, und dasselbe trifft auf $f^* : k[x] \to k[x]_x$ zu.

1) $\not\Rightarrow$ 3), sowie 1) $\not\Rightarrow$ 4), sowie 1) $\not\Rightarrow$ 5), sowie 2) $\not\Rightarrow$ 3), sowie 2) $\not\Rightarrow$ 4), sowie 2) $\not\Rightarrow$ 5): Man nehme eine abgeschlossene Untervarietät, wie zum Beispiel $f : \{0\} = V(x) \hookrightarrow \mathbb{A}^1$. Hier ist f injektiv, nicht surjektiv, aber $f^* : k[x] \to k$ ist surjektiv, und nicht injektiv.

3) $\not\Rightarrow$ 1), sowie 3) $\not\Rightarrow$ 2), sowie 3) $\not\Rightarrow$ 5) und 4) $\not\Rightarrow$ 1): Siehe Aufgabe 3.

Alle diese Beispiele zeigen auch, dass 6) nicht aus den übrigen Aussagen folgt, weil seinerseits 6) alle anderen Aussagen implizieren.

5. $\star$ Die durch n Punkte $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ *gelochte affine Gerade* ist definiert durch $X_\alpha = D(f_\alpha) = \mathbb{A}^1(k) \setminus V(f_\alpha)$, wobei $f_\alpha := (t-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (t-\alpha_n) \in k[t]$. Kann eine durch n Punkte gelochte affine Gerade zu einer durch m Punkte gelochten affinen Geraden isomorph sein, wenn $n \neq m$? Hinweis: Betrachten Sie die abelsche Gruppe $A(X_\alpha)^*/k^*$.

   LÖSUNG: Einer Varietät X kann man stets die abelsche Gruppe $G(X) := A(X)^*/k^*$ zuordnen; sie besteht aus den nullstellenfreien nicht-konstanten regulären Funktionen auf X. Es ist G ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Varietäten in die Kategorie der abelschen Gruppen. Insbesondere gilt $X \cong Y \Rightarrow G(X) \cong G(Y)$. Für X_α ergibt sich

$$G(X_\alpha) = (k[t]_{(t-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(t-\alpha_n)})^*/k^* = (t-\alpha_1)^{\mathbb{Z}} \cdot \ldots \cdot (t-\alpha_1)^{\mathbb{Z}}.$$

   Dies ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang n mit der Basis $\{(t-\alpha_i)\}_{1\leq i\leq n}$. Wir können also n aus X_α ablesen. Der Rang einer freien abelschen Gruppe G ist eindeutig bestimmt, weil es die Dimension von $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$ ist.