

## 8. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 4.6.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:  
bis Freitag: 2.4  
bis Dienstag: 2.5
2. (a) Seien  $R_1, R_2, R_3$  drei  $R$ -Algebren. Finden Sie natürliche Isomorphismen von  $R$ -Algebren

$$R_1 \otimes_R (R_2 \otimes_R R_3) \cong (R_1 \otimes_R R_2) \otimes_R R_3.$$

$$R_1 \otimes_R (R_2 \times R_3) \cong (R_1 \otimes_R R_2) \times (R_1 \otimes_R R_3).$$

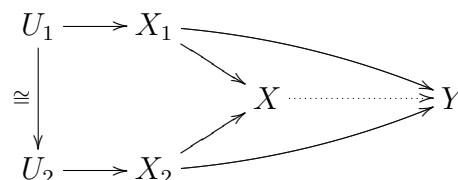
- (b) Sei  $K$  ein Körper und  $a \in K^{alg}$  separabel über  $K$  vom Grad  $n$ . Zeigen Sie  $K(a) \otimes_K K^{alg} \cong K^{alg} \times \dots \times K^{alg}$ , wobei die Anzahl der Faktoren  $n$  ist. Folgern Sie  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ .
- (c) ★ Gibt es einen Zusammenhang zwischen  $\mathbb{Q}^{alg} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{alg}$  und der absoluten Galoisgruppe  $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{alg}/\mathbb{Q})$ ?

(4+2\* Punkte)

3. (a) Sind  $R_j \rightarrow S_j$  ( $j = 1, 2$ ) zwei endliche Homomorphismen von  $R$ -Algebren, so ist auch der induzierte Homomorphismus  $R_1 \otimes_R R_2 \rightarrow S_1 \otimes_R S_2$  endlich. Wenn  $R$  ein Körper ist, so gilt eine entsprechende Aussage für injektive Homomorphismen, aber das brauchen Sie nicht zu beweisen.
- (b) Folgern Sie aus (a) und der Noether-Normalisierung: Sind  $X, Y$  affine Varietäten, so gilt  $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$ .

(4 Punkte)

4. Sei  $X$  die Verklebung von zwei Prävarietäten  $X_1$  und  $X_2$  mittels eines Isomorphismus  $X_1 \supseteq U_1 \xrightarrow{f} U_2 \subseteq X_2$ . Zeigen Sie die folgende universelle Eigenschaft: Es gibt zwei Morphismen  $i_j : X_j \rightarrow X$  ( $j = 1, 2$ ), sodass  $i_1|_{U_1} = i_2|_{U_2} \circ f$ . Sind  $t_i : X_i \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) Morphismen mit  $t_1|_{U_1} = t_2|_{U_2} \circ f$ , so gibt es genau einen Morphismus  $t : X \rightarrow Y$  mit  $t|_{X_j} = t_j$  ( $j = 1, 2$ ):



(4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 6.6. besprochen werden?

(2 Punkte)

★ Wir wünschen Ihnen schöne Pfingstferien! ★