Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

8. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 4.6.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Freitag: 2.4
   bis Dienstag: 2.5

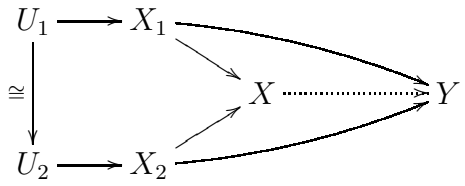
2. (a) Seien R_1, R_2, R_3 drei R-Algebren. Finden Sie natürliche Isomorphismen von R-Algebren
$$R_1 \otimes_R (R_2 \otimes_R R_3) \cong (R_1 \otimes_R R_2) \otimes_R R_3.$$
$$R_1 \otimes_R (R_2 \times R_3) \cong (R_1 \otimes_R R_2) \times (R_1 \otimes_R R_3).$$
   (b) Sei K ein Körper und $a \in K^{alg}$ separabel über K vom Grad n. Zeigen Sie $K(a) \otimes_K K^{alg} \cong K^{alg} \times \ldots \times K^{alg}$, wobei die Anzahl der Faktoren n ist. Folgern Sie $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
   (c) $\star$ Gibt es einen Zusammenhang zwischen $\mathbb{Q}^{alg} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{alg}$ und der absoluten Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{alg}/\mathbb{Q})$?

   (4+2* Punkte)

3. (a) Sind $R_j \to S_j$ $(j = 1, 2)$ zwei endliche Homomorphismen von R-Algebren, so ist auch der induzierte Homomorphismus $R_1 \otimes_R R_2 \to S_1 \otimes_R S_2$ endlich. Wenn R ein Körper ist, so gilt eine entsprechende Aussage für injektive Homomorphismen, aber das brauchen Sie nicht zu beweisen.
   (b) Folgern Sie aus (a) und der Noether-Normalisierung: Sind X, Y affine Varietäten, so gilt $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

   (4 Punkte)

4. Sei X die Verklebung von zwei Prävarietäten X_1 und X_2 mittels eines Isomorphismus $X_1 \supseteq U_1 \xrightarrow{f} U_2 \subseteq X_2$. Zeigen Sie die folgende universelle Eigenschaft: Es gibt zwei Morphismen $i_j : X_j \to X$ $(j = 1, 2)$, sodass $i_1|_{U_1} = i_2|_{U_2} \circ f$. Sind $t_i : X_i \to Y$ $(i = 1, 2)$ Morphismen mit $t_1|_{U_1} = t_2|_{U_2} \circ f$, so gibt es genau einen Morphismus $t : X \to Y$ mit $t|_{X_j} = t_j$ $(j = 1, 2)$:



   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 6.6. besprochen werden? *(2 Punkte)*

$\star$ *Wir wünschen Ihnen schöne Pfingstferien!* $\star$