Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

9. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 11.6.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Freitag: 3.1
   bis Dienstag: 3.2

2. In dieser Aufgabe konstruieren wir das Produkt $X \times Y$ von zwei Prävarietäten X, Y, zusammen mit Morphismen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$, sodass die universelle Eigenschaft des Produktes erfüllt ist (vgl. Prop. 2.5.2 in der Vorlesung). Wenn X und Y affin, dann können wir Satz 2.3.11 benutzen.
   (a) Wenn X affin ist, aber Y beliebig, so gibt es eine offene affine Überdeckung $Y = \cup_i Y_i$. Betrachten Sie in den Produkten $X \times Y_i$ die offenen Teilmengen $U_{ij} := \pi_{Y_i}^{-1}(Y_i \cap Y_j)$ und leiten $U_{ij} \cong X \times (Y_i \cap Y_j) \cong U_{ji}$ aus der universellen Eigenschaft her. Benutzen Sie nun Lemma 2.4.7 im Skript, um die $X \times Y_i$ zu einer Prävarietät $X \times Y$ zu verkleben, die tatsächlich die universelle Eigenschaft erfüllt.
   (b) Wenn X, Y beliebig, wählen Sie eine offene affine Überdeckung $X = \cup_i X_i$ und gehen mit den bereis konstruierten Produkten $X_i \times Y$ genauso vor.
   (c) Vollziehen Sie diese Konstruktion im Spezialfall $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ nach, indem Sie vier affine Karten, die isomorph zu $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$ sind und $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ überdecken, sowie die Verklebe-Isomorphismen angeben. *(6 Punkte)*

3. Finden Sie eine Bijektion zwischen der Menge der Morphismen $X \to \mathbb{P}^1$ und der Menge der Tupel (U_1, U_2, s_1, s_2), wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ Schnitte mit $X = U_1 \cup U_2$ und $s_1|_{U_1 \cap U_2} \cdot s_2|_{U_1 \cap U_2} = 1$ sind. *(2 Punkte)*

4. Für einen endlich-dim. Vektorraum V sei $\mathbb{P}(V)$ die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von V. Ein *linearer Teilraum* von $\mathbb{P}(V)$ der Dimension d hat die Form $\mathbb{P}(U)$ für einen $d+1$-dimensionalen Unterraum $U \subseteq V$. Für $d = 0$ sind das Punkte, für $d = 1$ sind es *projektive Geraden*. Zeigen Sie:
   (a) Für je zwei Punkte in $\mathbb{P}(V)$ gibt es genau eine projektive Gerade, die sie enthält.
   (b) Je zwei projektive Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(k^3)$ schneiden sich in genau einem Punkt. Gilt das auch in $\mathbb{A}^2$? *(4 Punkte)*

5. $\star$ Interpretieren Sie mit Hilfe von $\mathbb{P}^n$ die "geometrische Reihe"

$$\frac{[\mathbb{A}^{n+1}] - [\mathbb{A}^0]}{[\mathbb{A}^1] - [\mathbb{A}^0]} = [\mathbb{A}^0] + [\mathbb{A}^1] + \ldots + [\mathbb{A}^n].$$

(2⋆ Punkte)

6. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 13.6. besprochen werden? *(2 Punkte)*