Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

9. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

2. In dieser Aufgabe konstruieren wir das Produkt $X \times Y$ von zwei Prävarietäten X, Y, zusammen mit Morphismen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$, sodass die universelle Eigenschaft des Produktes erfüllt ist (vgl. Prop. 2.5.2 in der Vorlesung). Wenn X und Y affin, dann können wir Satz 2.3.11 benutzen.

   (a) Wenn X affin ist, aber Y beliebig, so gibt es eine offene affine Überdeckung $Y = \cup_i Y_i$. Betrachten Sie in den Produkten $X \times Y_i$ die offenen Teilmengen $U_{ij} := \pi_{Y_i}^{-1}(Y_i \cap Y_j)$ und leiten $U_{ij} \cong X \times (Y_i \cap Y_j) \cong U_{ji}$ aus der universellen Eigenschaft her. Benutzen Sie nun Lemma 2.4.7 in [Gathmann], um die $X \times Y_i$ zu einer Prävarietät $X \times Y$ zu verkleben, die tatsächlich die universelle Eigenschaft erfüllt.

   (b) Wenn X, Y beliebig, wählen Sie eine offene affine Überdeckung $X = \cup_i X_i$ und gehen mit den bereis konstruierten Produkten $X_i \times Y$ genauso vor.

   (c) Vollziehen Sie diese Konstruktion im Spezialfall $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ nach; dieses Produkt wird von 4 Kopien von $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ überdeckt.

Lösung: Wir bemerken zunächst ganz allgemein die folgende universelle Eigenschaft von offenen Untervarietäten: Ist $U \subseteq Y$ offen, so faktorisiert ein Morphismus $f : X \to Y$ genau als $X \to U \hookrightarrow Y$ für einen (sogar eindeutigen) Morphismus $X \to U$, wenn als Mengen $f(X) \subseteq U$ gilt. Wir werden das nun oft benutzen.

(a) Zeigen wir, dass U_{ij} zusammen mit den Projektionen $U_{ij} \hookrightarrow X \times Y_i \to X$ und $U_{ij} \xrightarrow{\pi_{Y_i}} Y_i \cap Y_j$ die universelle Eigenschaft von $X \times (Y_i \cap Y_j)$ erfüllt. Ist T eine Prävarietät und sind $T \to X$, $T \to Y_i \cap Y_j$ zwei Morphismen, so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von $X \times Y_i$ genau einen Morphismus $T \to X \times Y_i$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
T \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[d] & X \times Y_i \arrow[u] \arrow[d] \\
Y_i \cap Y_j \arrow[r] & Y_i
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dieser landet wegen der Kommutativität unten bereits mengentheoretisch in U_{ij}. Es gibt also genau einen Morphismus $T \to U_{ij}$, sodass

$$\begin{tikzcd} & X \\ T \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & U_{ij} \arrow[u] \arrow[d] \\ & Y_i \cap Y_j \end{tikzcd}$$

kommutiert; und dies war zu zeigen. Durch Vertauschen der Indizes erhalten wir genauso einen Isomorphismus $X \times (Y_i \cap Y_j) \cong U_{ji}$ und durch Komposition einen Isomorphismus

$$f_{ij} : U_{ij} \cong X \times (Y_i \cap Y_j) \cong U_{ji}.$$

Nach Konstruktion gilt also $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$. Nun müssen wir uns noch überlegen, dass die Kozykelbedingung erfüllt ist (vgl. Lemma 2.4.7 und das Bild 2.4.8 in [Gathmann]), das heißt dass für alle Tripel i, j, k von Indizes auf den Dreier-Durchschnitten $U_{ijk} := U_{ij} \cap U_{ik} = U_{ikj}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_{ijk} \arrow[rr, "f_{ij}|_{U_{ijk}}"] \arrow[dr, "f_{ik}|_{U_{ikj}}"'] & & U_{jik} \arrow[dl, "f_{jk}|_{U_{jki}}"] \\ & U_{kij} & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dazu beobachten wir wie oben $U_{ijk} \cong X \times (Y_i \cap Y_j \cap Y_k)$. Nach Konstruktion stimmt die Komposition $U_{ijk} \cong X \times (Y_i \cap Y_j \cap Y_k) \cong U_{jik}$ mit $f_{ij}|_{U_{ijk}}$ überein. Das gilt nun aber für alle Tripel von Indizes. Das obige Diagramm können wir daher in drei kommutative Dreiecke zerlegen:

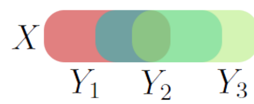
$$\begin{tikzcd} U_{ijk} \arrow[rr, "f_{ij}|_{U_{ijk}}"] \arrow[dr, "\cong"'] \arrow[ddr, "f_{ik}|_{U_{ikj}}"'] & & U_{jik} \arrow[dl, "\cong"] \arrow[ddl, "f_{jk}|_{U_{jki}}"] \\ & X \times (Y_i \cap Y_j \cap Y_j) & \\ & U_{kij} \arrow[u, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

Daraus folgt $f_{jk}|_{U_{ijk}} \circ f_{ij}|_{U_{ijk}} = f_{ik}|_{U_{ijk}}$.

Die $X \times Y_i$ verkleben also entlang der Isomorphismen

$$X \times Y_i \supseteq U_{ij} \cong X \times (Y_i \cap Y_j) \cong U_{ji} \subseteq X \times Y_j$$

zu einer Prävarietät, die wir $X \times Y$ nennen, wie im folgenden Bild:



Skizzieren wir schließlich die universelle Eigenschaft: Nach Lemma 2.4.6 verkleben die Projektionen $X \times Y_i \to X$ zu einer Projektion $X \times Y \to X$; ebenso verkleben die Projektionen $X \times Y_i \to Y_i \hookrightarrow Y$ zu $X \times Y \to Y$. Ist nun T eine Prävarietät mit Morphismen $T \to X$ und $T \to Y$, so sei T_i das Urbild von $Y_i \subseteq Y$. Dann erhalten wir eindeutige Morphismen $T_i \to X \times Y_i$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \\ T_i \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & X \times Y_i \arrow[u] \arrow[d] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

kommutieren. Die Eindeutigkeit stellt die Kompatibilität auf den Durchschnitten sicher. Die Morphismen verkleben daher nach Lemma 2.4.6 zu einem eindeutig bestimmten Morphismus $T \to X \times Y$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \\ T \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & X \times Y \arrow[u] \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert; wie gewünscht.

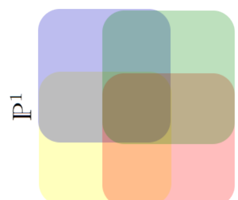
(b) Wir haben in (a) nirgendwo benutzt, dass X affin ist; wir brauchten nur die Existenz der Produkte $X \times Y_i \cong Y_i \times X$. Daher kann man nun genauso vorgehen und die $X_i \times Y$ verkleben zu $X \times Y$ mit der gewünschten universellen Eigenschaft.

Bemerkung: Verklebetechniken sind in den Anfängen der algebraischen Geometrie allgegenwärtig. Es ist wichtig, eine geometrische Vorstellung davon zu haben, was hier passiert. Allerdings kann es schon einmal passieren, dass man sich in den Details verzettelt. Dies ist zunächst einmal nicht weiter schlimm, weil es einen funktoriellen Apparat gibt, mit dem man sich das meistens schenken kann.

(c) Es ist $\mathbb{P}^1$ die Verklebung von zwei affinen Geraden $\mathbb{A}^1$ entlang des Isomorphismus $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}, t \mapsto t^{-1}$, der auf Koordinatenringen durch $k[u]_u \cong k[v]_v$, $u \mapsto v^{-1}$ gegeben ist, wenn wir die affinen Koordinaten einmal u und v nennen. Für den anderen $\mathbb{P}^1$ nehmen wir x und y. Nach (a) ist $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ die Verklebung der affinen Varietäten $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^2$ mit Koordinaten x, u und $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^2$

mit Koordinaten x, v vermöge des Isomorphismus, der auf den Koordinatenringen durch $k[x,u]_u \cong k[x,v]_v, x \mapsto x, u \mapsto v^{-1}$ gegeben ist. Explizit besteht $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ aus Tupeln $(a,(c:d))$ (erste Koordinate affin, zwei projektiv), und die beiden affinen Karten sind durch $\mathbb{A}^2 \ni (a,c) \mapsto (a,(c:1))$ bzw. $\mathbb{A}^2 \ni (a,d) \mapsto (a,(1:d))$ gegeben. Für die andere affine Koordinate (y anstelle von x) kann man genauso vorgehen. Nun entsteht $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ nach (b) durch erneutes Verkleben. Konkret besteht es aus Tupeln $((a:b),(c:d))$ (zwei projektive Koordinaten) mit den vier affinen Karten

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^2 &\ni (a,c) \mapsto ((a:1),(c:1)) \\ \mathbb{A}^2 &\ni (a,d) \mapsto ((a:1),(1:d)) \\ \mathbb{A}^2 &\ni (b,c) \mapsto ((1:b),(c:1)) \\ \mathbb{A}^2 &\ni (b,d) \mapsto ((1:b),(1:d)) \end{aligned}$$



Bemerkung: Mit der Segre-Einbettung werden wir noch ein anschaulicheres Bild von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ bekommen (Example 3.3.14 in [Gathmann]).

3. Finden Sie eine Bijektion zwischen der Menge der Morphismen $X \to \mathbb{P}^1$ und der Menge der Tupel (U_1, U_2, s_1, s_2), wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ Schnitte mit $X = U_1 \cup U_2$ und $s_1|_{U_1 \cap U_2} \cdot s_2|_{U_1 \cap U_2} = 1$ sind.

   Lösung: Sei $\mathbb{P}^1 = V_1 \cup V_2$ für $V_1 = \mathbb{A}^1$ mit Koordinate x und $V_2 = \mathbb{A}^1$ mit Koordinate y. Ein Morphismus $f : X \to \mathbb{P}^1$ zieht diese offene Überdeckung von $\mathbb{P}^1$ zu einer offenen Überdeckung $X = U_1 \cup U_2$ zurück mit $U_i = f^{-1}V_i$ und schränkt sich zu zwei Morphismen $f_i : U_i \to V_i$ ein. Wegen $A(V_1) = k[x]$ und $A(V_2) = k[y]$ und dem Isomorphismus von Lemma 2.4.6 (b)

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Hom}(U_1, \mathbb{A}^1) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}\big(A(V_1), \mathcal{O}_X(U_1)\big) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_X(U_1) \\ g & \longmapsto & g^*, \qquad \alpha & \longmapsto & \alpha(x) \end{array} \tag{1}$$

   liefern die f_i Schnitte $s_1 := f_1^*(x) \in \mathcal{O}_X(U_1)$ und $s_2 := f_2^*(y) \in \mathcal{O}_X(U_2)$. Auf dem Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ folgt wegen der Identifikation $xy = 1$ in $\mathbb{P}^1$ daraus die Gleichung $s_1|_{U_1 \cap U_2} \cdot s_2|_{U_1 \cap U_2} = 1$ in $\mathcal{O}_X(U_1 \cap U_2)$. Diese Beschreibung lässt sich mithilfe des Isomorphismus (1) umkehren: Die Schnitte $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ liefern Morphismen $f_i : U_i \to V_i$ mit $f_1^*(x) = s_1$ und $f_2^*(y) = s_2$. Mit Lemma 2.4.6 verkleben sich diese wegen $s_1|_{U_1 \cap U_2} \cdot s_2|_{U_1 \cap U_2} = 1$ zu einem Morphismus $f : X \to \mathbb{P}^1$.

4. Für einen endlich-dim. Vektorraum V sei $\mathbb{P}(V)$ die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von V. Ein *linearer Teilraum* von $\mathbb{P}(V)$ der Dimension d hat die Form $\mathbb{P}(U)$ für einen $d+1$-dimensionalen Unterraum $U \subseteq V$. Für $d=0$ sind das Punkte, für $d=1$ sind es *projektive Geraden*. Zeigen Sie:

   (a) Für je zwei Punkte in $\mathbb{P}(V)$ gibt es genau eine projektive Gerade, die sie enthält.

   (b) Je zwei projektive Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(k^3)$ schneiden sich in genau einem Punkt. Gilt das auch in $\mathbb{A}^2$?

   Lösung: (a) Das liegt einfach daran, dass es für je zwei (d.h. verschiedene) 1-dimensionale Unterräume $U_1, U_2 \subseteq V$ genau einen 2-dimensionalen Unterraum $U \subseteq V$ gibt mit $U_1 \subseteq U$ und $U_2 \subseteq U$, nämlich $U = U_1 + U_2$.

   (b) In $\mathbb{A}^2$ schneiden sich zwei parallele Geraden bekanntlich nicht. In $\mathbb{P}^2$ haben zwei projektive Geraden die Form $P(U), P(V)$ mit 2-dimensionalen Unterräumen von k^3, welche verschieden sind. Es folgt $U \subset U + V$ und damit notwendigerweise $\dim(U+V) = 3$. Die Dimensionsformel gibt $\dim(U \cap V) = 2+2-3 = 1$, d.h. $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(U \cap V)$ ist ein Punkt.

5. $\star$ Interpretieren Sie mit Hilfe von $\mathbb{P}^n$ die „geometrische Reihe“

$$\frac{[\mathbb{A}^{n+1}] - [\mathbb{A}^0]}{[\mathbb{A}^1] - [\mathbb{A}^0]} = [\mathbb{A}^0] + [\mathbb{A}^1] + \ldots + [\mathbb{A}^n].$$

   Lösung: Aus Remark 3.1.4 in [Gathmann] geht die Zerlegung

$$\mathbb{P}^n = \{a_0 = 0\} \sqcup \{a_0 \neq 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1} \sqcup \mathbb{A}^n$$

   hervor. Induktiv folgt daraus die Zerlegung

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^n.$$

   Der projektive Raum $\mathbb{P}^n$ ist nun aber Quotient von $k^{n+1} \setminus \{0\} = \mathbb{A}^{n+1} - \mathbb{A}^0$ nach der Gruppenwirkung von $k^* = \mathbb{A}^1 - \mathbb{A}^0$. All dies lässt sich in der „geometrischen Reihe“

$$\frac{[\mathbb{A}^{n+1}] - [\mathbb{A}^0]}{[\mathbb{A}^1] - [\mathbb{A}^0]} = [\mathbb{A}^0] + [\mathbb{A}^1] + \ldots + [\mathbb{A}^n]$$

   zusammenfassen. Bemerkung: Das ist ein Beispiel von „Kategorifizierung“. Mehr dazu gibt es zum Beispiel unter http://mathoverflow.net/questions/43579 sowie http://math.ucr.edu/home/baez/week184.html.