

10. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 18.6.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
bis Freitag: 3.3
bis Dienstag: 3.4
2. Sei $\text{char}(k) \neq 2$ und $X := V_{\mathbb{P}^2}(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{P}^2$ der reguläre Kegelschnitt. Finden Sie einen Isomorphismus $\mathbb{P}^1 \cong X$. *Tipp*: Pythagoräische Zahlentripel.
(4 Punkte)

3. Die *Homogenisierung* eines Polynoms $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ bezüglich x_0 ist durch

$$f^h := x_0^{\deg(f)} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in k[x_0, \dots, x_n]$$

definiert; entsprechend ist $I^h := (f^h : f \in I)$ die Homogenisierung eines Ideals $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Zeigen Sie:

- (a) Es ist $I^h \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal.
- (b) Die projektive algebraische Menge $V_{\mathbb{P}^n}(I^h) \subseteq \mathbb{P}^n$ ist der Abschluss der affinen algebraischen Menge $V_{\mathbb{A}^n}(I) \subseteq \mathbb{A}^n \cong \mathbb{P}^n \setminus V_{\mathbb{P}^n}(x_0) \subseteq \mathbb{P}^n$. Wir nennen sie daher den *projektiven Abschluss*.
- (c) Zeichnen Sie die *Cayley-Fläche* $V_{\mathbb{A}^3}(4 \cdot a \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + 16 \cdot x \cdot y \cdot z - 1)$, zum Beispiel mit SURFER¹. Wackeln Sie am Parameter a ! Was passiert für $a = 1$? Berechnen Sie den projektiven Abschluss und deuten Sie ihn geometrisch.
(4 Punkte)

4. Sei V der k -Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad 2 in x_0, x_1, x_2 .
 - (a) Bestimmen Sie eine Basis von V und folgern Sie $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^5$.
 - (b) Finden Sie eine offene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}(V)$, deren Punkte zu regulären Kegelschnitten in \mathbb{P}^2 korrespondieren. Man nennt X den (groben) *Modulraum* der regulären Kegelschnitte.
 - (c) Wie lassen sich Elemente von $\mathbb{P}(V) \setminus X$ geometrisch interpretieren?
 - (d) Sei $P \in \mathbb{P}^2$. Finden Sie einen linearen Teilraum $L \subseteq \mathbb{P}(V)$, sodass $L \cap X$ genau aus den Kegelschnitten in \mathbb{P}^2 besteht, die durch P laufen.
(4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 20.6. besprochen werden?
(2 Punkte)

¹Download der Vollversion: <http://www.imaginary-exhibition.com/surfer.php> . Online Java-Applet mit eingeschränkter Funktion: <http://www.imaginary-exhibition.com/jsurfer.php> .