Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

11. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 25.6.12, 12 Uhr

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Freitag: Zusatzblatt über 4.1 Singularitäten

2. Sei $d \geq 1$. Dann definiert $(x : y) \mapsto (x^d : x^{d-1}y : \ldots : xy^{d-1} : y^d)$ einen Morphismus $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$.
   (a) Zeigen Sie, dass $X := f(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^d$ abgeschlossen ist und f einen Isomorphismus $\mathbb{P}^1 \cong X$ induziert.
   (b) Nach (a) gilt $X = V(f_1, \ldots, f_s)$ mit homogenen Polynomen $f_1, \ldots, f_s$ in $k[x_0, \ldots, x_d]$. Bestimmen Sie diese explizit für $d = 2$ und $d = 3$.
   (c) $\star$ Wie sieht $I(X)$ aus?

   (4+2* Punkte)

3. Bestimmen Sie jeweils die Singularitäten der algebraischen Fläche $V(F) \subseteq \mathbb{A}^3$:
   (a) $F = x^2 + y^3 \cdot z$
   (b) $F = x^2 \cdot y - y^5 - z^2$
   (c) $F = x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4$
   (d) $\star$ $F = 4 \cdot a \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + 16 \cdot x \cdot y \cdot z - 1$ mit $a \in k^*$

   Hierbei sei $\mathrm{char}(k) = 0$. Zur Visualisierung können Sie Surfer benutzen.
   (4+2* Punkte)

4. (a) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und $P \in X$. Konstruieren Sie eine induzierte lineare Abbildung auf den Zariski-Tangentialräumen
   $$T_P(f) : T_P(X) \to T_{f(P)}(Y).$$
   (b) Zeigen Sie außerdem $T_P(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T_P(X)}$ und für $g : Y \to Z$ die 'Kettenregel' $T_P(g \circ f) = T_{f(P)}(g) \circ T_P(f)$.
   (c) $\star$ Interpretieren Sie (b) als die Aussage, dass $T : C \to (k\text{-VR})$ ein Funktor ist, wobei C eine geeignet definierte Kategorie ist.

   (4+1* Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 27.6. besprochen werden? *(2 Punkte)*