Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

11. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

2. Sei $d \geq 1$. Dann definiert $(x : y) \mapsto (x^d : x^{d-1}y : \ldots : xy^{d-1} : y^d)$ einen Morphismus $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$.

   (a) Zeigen Sie, dass $X := f(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^d$ abgeschlossen ist und f einen Isomorphismus $\mathbb{P}^1 \cong X$ induziert.

   (b) Nach (a) gilt $X = V(f_1, \ldots, f_s)$ mit homogenen Polynomen $f_1, \ldots, f_s$ in $k[x_0, \ldots, x_d]$. Bestimmen Sie diese explizit für $d = 2$ und $d = 3$.

   (c) $\star$ Wie sieht $I(X)$ aus?

LÖSUNG: (a) Nach den Korollaren 3.4.3 und 3.4.5 aus der Vorlesung ist X abgeschlossen in $\mathbb{P}^d$. Es induziert also f einen surjektiven Morphismus $\mathbb{P}^1 \to X$, den wir ebenfalls mit f bezeichnen. Definiere umgekehrt $g : X \to \mathbb{P}^1$ durch $g(a_0 : \ldots : a_n) := (a_0 : a_1)$ falls $a_0 \neq 0$ und $g(a_0 : \ldots : a_n) := (a_{d-1} : a_d)$ falls $a_d \neq 0$. Dies ist ein wohldefinierter Morphismus; er entsteht nämlich durch Verklebung von zwei Morphismen auf den offenen Mengen $X \setminus V(x_0)$, $X \setminus V(x_d)$, die X überdecken, und diese Morphismen stimmen auf dem Durchschnitt überein. Es gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$, denn für $x \neq 0$ ist $g(f(x : y)) = (x^d : x^{d-1}y) = (x : y)$ und für $y \neq 0$ ist $g(f(x : y)) = (xy^{d-1} : y^d) = (x : y)$. Weil f surjektiv ist, folgt automatisch $f \circ g = \mathrm{id}_X$.

(b) Für $d = 2$ haben wir den Morphismus $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, (x : y) \mapsto (x^2 : xy : y^2)$. Zwischen den Einträgen des Bildes besteht die Relation $x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$. Es gilt also $X \subseteq V(x_0x_2 - x_1^2)$. Es gilt sogar Gleichheit: Ist nämlich $(a : b : c) \in \mathbb{P}^2$ mit $ac = b^2$, so wähle ein $x \in k$ mit $a = x^2$ sowie ein $y \in k$ mit $c = y^2$. Dann ist $(xy)^2 = b^2$, also $b = \pm xy$. Indem man ggf. x durch $-x$ ersetzt, bleibt $a = x^2$ erhalten, wir erreichen aber $b = xy$. Wegen $a \neq 0$ oder $c \neq 0$ (oder $b \neq 0$, aber das impliziert bereits $a \neq 0$ und $c \neq 0$ wegen $ac = b^2$) gilt $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, d.h. $(x : y) \in \mathbb{P}^1$ ist wohldefiniert. Nach Konstruktion gilt nun $(a : b : c) = f(x : y)$. Damit ist $X = V(x_0x_2 - x_1^2)$.

Bemerkung: Es ist $V(x_0x_2 - x_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2$ der reguläre Kegelschnitt. Also ist (a) eine andere Sichtweise für den Isomorphismus von Aufgabe 2 von Blatt 10. Außerdem handelt es sich bei f um einen Spezialfall der sogenannten Veronese-Einbettung. Siehe dazu Example 3.4.11 in Gathmanns Skript.

Für $d = 3$ betrachten wir $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3, (x : y) \mapsto (x^3 : x^2y : xy^2 : y^3)$. Es gelten zunächst einmal die Relationen

$$(x^2y) \cdot (xy^2) = x^3 \cdot y^3 \ , \ (x^2y)^2 = x^3 \cdot xy^2 \ , \ (xy^2)^2 = x^2y \cdot y^3.$$

Wir sehen $X \subseteq V(x_0x_3 - x_1x_2, x_1^2 - x_0x_2, x_2^2 - x_1x_3)$. Sei umgekehrt $(a : b : c : d)$ in der rechten Menge, das heißt $ad = bc$, $b^2 = ac$, $c^2 = bd$. Daraus folgt $b^3 = abc = a^2d$, genauso $c^3 = ad^2$. Wähle $x \in k$ mit $a = x^3$ und $y \in k$ mit $d = y^3$. Es folgt $b^3 = a^2d = (x^2y)^3$, also $b = \zeta \cdot x^2y$ für eine dritte Einheitswurzel $\zeta \in k$. Wir ersetzen y durch ζy, behalten dabei die Gleichung $d = y^3$, erlangen aber $b = x^2y$. Es gilt weiterhin $c^3 = ad^2 = (xy^2)^3$, also $c = \zeta xy^2$ für eine dritte Einheitswurzel ζ. Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist auch $c = 0$, man kann $\zeta = 1$ wählen. Ansonsten ist $x^3y^3 = ad = bc = \zeta(x^2y)(\zeta xy^2) = \zeta x^3y^3$ und damit $\zeta = 1$. In jedem Falle ist also $c = xy^2$ und wir sehen, dass $(x : y)$ ein Urbild von $(a : b : c : d)$ ist.

(c) Nach dem projektiven Hilbertschen Nullstellensatz müssen wir nur die Radikale der in (b) berechneten Ideale I bestimmen. Sie stellen sich aber bereits als Primideale heraus. Für $d = 2$ sieht man das direkt: Das Polynom $x_0x_2 - x_1^2$ ist irreduzibel nach Eisenstein mit $k[x_0, x_2]$ als Grundring und dem Primelement $x_0 \in k[x_0, x_2]$. Also ist $(x_0x_2 - x_1^2) \subseteq k[x_0, x_1, x_2]$ ein Primideal. Für $d = 3$ wollen wir zeigen, dass $I := (x_0x_3 - x_1x_2, x_1^2 - x_0x_2, x_2^3 - x_1x_3)$ ein Primideal ist, d.h. dass $R := k[x_0, x_1, x_2, x_3]/I$ ein Integritätsring ist. Es reicht zu zeigen, dass der von f induzierte Homomorphismus

$$f^* : R \to k[s, t], x_0 \mapsto s^3, x_1 \mapsto s^2t, x_2 \mapsto st^2, x_3 \mapsto t^3$$

injektiv ist. Dazu kann man wie in der Lösung zu Blatt 3 vorgehen. Wir behaupten, dass R als Vektorraum über k von den Monomen

$$x_0^{\mathbb{N}}x_3^{\mathbb{N}}, x_0^{\mathbb{N}}x_1x_3^{\mathbb{N}}, x_0^{\mathbb{N}}x_2x_3^{\mathbb{N}}$$

erzeugt wird (es ist hier wieder $0 \in \mathbb{N}$). Nehmen wir uns ein Monom her, etwa $x_0^px_1^qx_2^rx_3^s$ mit $p, q, r, s \geq 0$. Wegen $x_1x_2 \equiv x_0x_3 \bmod I$ dürfen wir annehmen, dass nicht x_1 und x_2 gleichzeitig vorkommen. Wir müssen also nur die Fälle $x_0^px_2^rx_3^s$ und $x_0^px_1^qx_3^s$ betrachten. Per Symmetrie reicht es sogar, sich den ersten Fall anzuschauen. Für $r \in \{0, 1\}$ sind wir dann fertig. Für $r \geq 2$ machen wir eine Induktion. Es gilt $x_0^px_2^rx_3^s = x_0^px_2^2x_2^{r-2}x_3^s \equiv x_0^px_1x_2^{r-2}x_3^{s+1}$. Für $r = 2$ sind wir bereits am Ziel, und ansonsten formt man weiter um zu $x_0^px_1x_2x_2^{r-3}x_3^{s+1} \equiv x_0^{p+1}x_2^{r-3}x_3^{s+2}$. Nach Induktionsannahme liegt dies aber bereits im Erzeugnis.

Nehmen wir uns jetzt ein Element im Kern von f, etwa

$$u = p_1(x_0, x_3) + p_2(x_0, x_3)x_1 + p_3(x_0, x_3)x_2$$

mit Polynomen p_1, p_2, p_3 über k. Das ergibt in $k[s, t]$ die Gleichung

$$0 = p_1(s^3, t^3) + p_2(s^3, t^3)s^2t + p_3(s^3, t^3)st^2. \tag{1}$$

Betrachten wir nun die in Gleichung (1) vorkommenden Monome und schauen uns die Exponenten von s bzw. t modulo 3 an. Im ersten Summanden sind die Exponenten stets 0 bzw. 0, im zweiten 2 bzw. 1, im dritten 1 bzw. 2. Die Monome in (1) sind also allesamt verschieden. Es folgt $p_i(s^3, t^3) = 0$ für $i = 1, 2, 3$ und damit auch $p_i = 0$. Also ist $u = 0$.

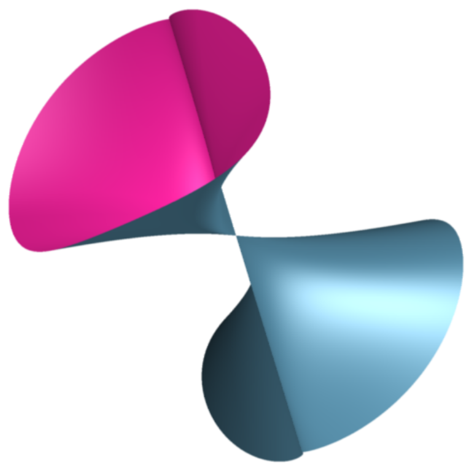
3. Bestimmen Sie jeweils die Singularitäten der algebraischen Fläche $V(F) \subseteq \mathbb{A}^3$:

   (a) $F = x^2 + y^3 \cdot z$
   (b) $F = x^2 \cdot y - y^5 - z^2$
   (c) $F = x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4$
   (d) $\star$ $F = 4 \cdot a \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + 16 \cdot x \cdot y \cdot z - 1$ mit $a \in k^*$

   Hierbei sei $\mathrm{char}(k) = 0$. Zur Visualisierung können Sie Surfer benutzen.

   Lösung: Die Jakobi-Matrix ist jeweils $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$. Der Rang ist $3 - 2 = 1$ für einen nicht-singulären Punkt, und 0 für einen singulären Punkt.

   (a) Die Jakobi-Matrix ist $(2x, 3y^2z, y^3)$. Sie verschwindet nur für $x = y = 0$; das z ist beliebig. Jeder Punkt der Form $(0, 0, z)$ liegt auch auf der Fläche. Die Menge der Singularitäten ist hier also eine Gerade:



   (b) Die Jakobi-Matrix ist $(2xy, x^2 - 5y^4, -2z)$. Sie verschwindet nur dann, wenn $x = y = z = 0$. Der Punkt $(0, 0, 0)$ ist also die einzige Singularität:

(c) Die Jakobi-Matrix ist $(2x - 3x^2, 2y + 4y^3, 3z^2 - 4z^3)$. Sie verschwindet genau dann, wenn $x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$ und $y = 0 \vee y = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$ sowie $z = 0 \vee z = \frac{3}{4}$. Man kann nun nachrechnen, dass von diesen Lösungen aber nur $(0, 0, 0)$ die Gleichung $x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0$ erfüllt. Also ist das wieder die einzige Singularität:

Bemerkung: Alle diese Flächen lassen sich zu glatten Flächen mittels eines Parameters a deformieren. (a) $x^2 + y^3z - a$, (b) $x^2 \cdot y - y^5 - z^2 + a$, (c) $x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 + a$. Mit Surfer lässt sich diese Deformation jeweils sehr schön veranschaulichen.

(d) Das ist die Cayley-Fläche, der wir schon in Blatt 10 begegnet sind. Die Jakobi-Matrix ist $8(ax + 2yz, ay + 2xz, az + 2xy)$. Sie verschwindet genau dann, wenn

$$x = -\frac{2yz}{a}, y = -\frac{2xz}{a}, z = -\frac{2xy}{a}.$$

Aus der Gleichung $4a(x^2 + y^2 + z^2) + 16xyz = 1$ geht weiter hervor, dass eine der Variablen $\neq 0$ ist. Per Symmetrie dürfen wir $x \neq 0$ annehmen. Es ergibt sich durch Einsetzen der Gleichung für y in die von x, dass $x = \frac{4xz^2}{a^2}$ und damit $z = \pm\frac{a}{2}$. Genauso folgt $y = \pm\frac{a}{2}$. Die Vorzeichen können sich aber unterscheiden. Aus der Gleichung für x folgt nun ebenfalls $x = \pm\frac{a}{2}$, wobei das Vorzeichen $+$ ist wenn sich die Vorzeichen von y, z unterscheiden, und ansonsten $-$ ist. Die Lösungen sind also

$$(\tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}, -\tfrac{a}{2}), (\tfrac{a}{2}, -\tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}), (-\tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}), (-\tfrac{a}{2}, -\tfrac{a}{2}, -\tfrac{a}{2}).$$

Setzen wir diese in die Gleichung $4a(x^2 + y^2 + z^2) + 16xyz = 1$ ein, so ergibt sich $a^3 = 1$. Es muss also a eine der drei dritten Einheitswurzeln sein (wovon nur eine reell ist, nämlich $a = 1$), damit es überhaupt Singularitäten gibt. In diesem Fall gibt es dann genau 4 Stück, nämlich $\frac{a}{2} \cdot (-uv, u, v)$ mit $u, v \in \{\pm 1\}$. Hier noch einmal das Bild für $a = 1$:

Übrigens kann man zeigen, dass jede projektive Fläche vom Grad 3 mit genau 4 Knoten zur Cayley-Fläche isomorph ist.

4. (a) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und $P \in X$. Konstruieren Sie eine induzierte lineare Abbildung auf den Zariski-Tangentialräumen

$$T_P(f) : T_P(X) \to T_{f(P)}(Y).$$

(b) Zeigen Sie außerdem $T_P(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T_P(X)}$ und für $g : Y \to Z$ die 'Kettenregel' $T_P(g \circ f) = T_{f(P)}(g) \circ T_P(f)$.

(c) $\star$ Interpretieren Sie (b) als die Aussage, dass $T : C \to (k\text{-VR})$ ein Funktor ist, wobei C eine geeignet definierte Kategorie ist.

LÖSUNG: (a) Der Tangentialraum $T_P(X)$ ist $(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^\vee$, wobei $\mathfrak{m}_P \subseteq \mathcal{O}_{X,P}$ das maximale Ideal im lokalen Ring bei P bezeichnet (Bemerkung 4.1.7). Ist nun $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und $P \in X$, so erhalten wir einen Homomorphismus von lokalen Ringen $f^* : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$, den wir der Übersichtlichkeit halber mit $f_P^\#$ bezeichnen. Dieser bildet $\mathfrak{m}_{f(P)}$ nach $\mathfrak{m}_P$ und damit auch $\mathfrak{m}_{f(P)}^2$ nach $\mathfrak{m}_P^2$ ab. Nach dem Homomorphiesatz erhalten wir also eine k-lineare Abbildung

$$f_P^\# : \mathfrak{m}_{f(P)}/\mathfrak{m}_{f(P)}^2 \to \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2.$$

Dualisieren liefert eine k-lineare Abbildung

$$T_P(f) := (f_P^\#)^\vee : T_P(X) \to T_{f(P)}(Y)\,,\ v \mapsto v \circ f_P^\#.$$

Explizit ist also für jeden Tangentialvektor $v \in T_P(X) = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2, k)$ der induzierte Tangentialvektor $T_P(f)(v) \in T_{f(P)}(Y) = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_{f(P)}/\mathfrak{m}_{f(P)}^2, k)$ durch $T_P(f)(v)(s \mod \mathfrak{m}_{f(P)}^2) = v(f_P^\#(s) \mod \mathfrak{m}_P^2)$ für $s \in \mathfrak{m}_{f(P)}$ definiert.

(b) Für $f = \mathrm{id}$ ist $f^* = \mathrm{id}$ und $f_P^\# = \mathrm{id}$. Wir sehen $T_P(\mathrm{id})(v) = v \circ \mathrm{id} = v$ für alle v, also $T_P(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.

Sind Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ gegeben, so gilt $(g \circ f)_P^\# = f_P^\# \circ g_{f(P)}^\#$ für alle $P \in X$. Wir erhalten also für alle $v \in T_P(X)$:

$$T_P(g\circ f)(v) = v\circ(g\circ f)_P^\# = v\circ f_P^\# \circ g_{f(P)}^\# = T_P(f)(v)\circ g_{f(P)}^\# = (T_{f(P)}(g)\circ T_P(f))(v)$$

Damit ist $T_{f(P)}(g) \circ T_P(f) = T_P(g \circ f)$ gezeigt.

Bemerkung: Das ist auch als Kettenregel bekannt, weil es in lokalen Koordinaten genau das wiedergibt, was man als Kettenregel (für Polynome im Falle von Varietäten) kennt. Nur ist der Nachweis hier nichts weiter als das Einsetzen von Definitionen. Die ansonsten erforderlichen Rechnungen sind durch die Abstraktion verschwunden.

(c) Sei C die Kategorie der *punktierten* Varietäten; ein Objekt in C ist ein Paar (X, P) bestehend aus einer Varietät X und einem Punkt $P \in X$. Ein Morphismus $(X, P) \to (Y, Q)$ ist ein Morphismus $f : X \to Y$ von Varietäten mit $f(P) = Q$. Es ist klar, wie die Komposition zu definieren ist, und dass es sich um eine Kategorie handelt. In (a) haben wir gesehen, wie man $C \to (k\text{-VR}), (X, P) \mapsto T_P(X)$ auf Morphismen definieren kann, und in (b) haben wir nachgerechnet, dass es sich dabei um einen Funktor handelt. Übrigens: Man kann das alles genauso für lokalgeringte Räume über k machen. Darunter fallen für $k = \mathbb{R}$ insbesondere glatte Mannigfaltigkeiten. Der Tangentialraum stimmt dann mit dem aus der Differentialgeometrie bekannten überein.