Algebraische Geometrie
SoSe 2012

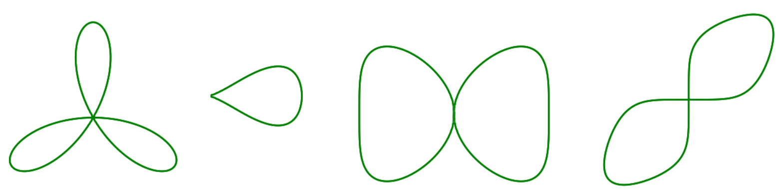
Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

12. Übungsblatt — Lösungsvorschlag

1. Bestimmen Sie für die folgenden ebenen projektiven Kurven jeweils die Vielfachheit und die Tangenten inklusive Vielfachheit im Punkte $(0:0:1)$.

   (a) $V(x^4 + y^4 - x^2z^2)$
   (b) $V(x^6 + y^6 - xyz^4)$
   (c) $V(x^4 + y^4 + y^2z^2 - x^3z)$
   (d) $V(y^4 + x^4 - y^3z + 2x^2y^2 + 3x^2yz)$

   Welche Kurve passt zu welchem Bild?



(1) (2) (3) (4)

Lösung: Wir dehomogenisieren jeweils nach z. Die Polynome lauten dann, mit hervorgehobenen homogenen Bestandteilen kleinsten Grades:

(a) $x^4 + y^4 + \underline{-x^2}$
(b) $x^6 + y^6 + \underline{-xy}$
(c) $x^4 + y^4 - x^3 + \underline{y^2}$
(d) $y^4 + x^4 + 2x^2y^2 + \underline{3x^2y - y^3}$

Bei (a),(b),(c) ist die Vielfachheit des Punktes $(0:0:1)$ gleich 2, bei (d) ist sie 3. Bei (a) ist die Tangente $x = 0$ mit Vielfachheit 2. Es handelt sich also um Kurve (3). Bei (b) sind die Tangenten $x = 0$ und $y = 0$, jeweils mit Vielfachheit 1. Das muss Kurve (4) sein. Bei (c) ist die Tangente $y = 0$ mit Vielfachheit 2, das ist also Kurve (2). Bei (d) berechnen wir noch $3x^2y - y^3 = ((\sqrt{3}x)^2 - y^2)y = (\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y)y$ und sehen, dass es drei Tangenten jeweils mit Vielfachheit 1 gibt. Das ist Kurve (1).

2. Sei M ein endlich-erzeugter R-Modul und $f : M \to M$ ein surjektiver Endomorphismus. Folgern Sie, dass f injektiv ist. Tipp: Nakayama-Lemma für einen geeigneten $R[T]$-Modul.

   LÖSUNG: Für $p \in R[T]$ und $m \in M$ sei $pm := p(f)(m)$. Auf diese Weise wird M zu einem $R[T]$-Modul; er ist immer noch endlich-erzeugt. Zum Beispiel gilt $Tm = f(m)$ für $m \in M$. Die Surjektivität von f besagt also $TM = M$. Nach dem Nakayama-Lemma gibt es ein $p \in R[T]$ mit $p \equiv 1 \bmod T$, sodass $pM = 0$. Schreiben wir $p = 1 + qT$, so bedeutet dies $(-q(f)) \circ f = \mathrm{id}_M$. Also ist f injektiv.

   Bemerkung: Wenn M nicht endlich-erzeugt ist, so stimmt dies nicht mehr: Sei zum Beispiel $M = R^{\mathbb{N}}$ der R-Modul aller Folgen und f der Shift-Operator, der durch $f(a_0, a_1, \dots) := (a_1, a_2, \dots)$ definiert ist. Dann ist f surjektiv, aber $\ker(f) \cong R$. Insbesondere gilt das Nakayama-Lemma nicht für alle Moduln.

3. Sei R ein Hauptidealring und $(0) \neq \mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Zeigen Sie, dass $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring ist. Wie sieht die diskrete Bewertung konkret aus? Gehen Sie auf das Beispiel $R = k[T]$ und $\mathfrak{p} = (T - a)$ ein.

   LÖSUNG: Mit R ist ebenfalls $R_\mathfrak{p}$ ein Hauptidealring. Lokalisierungen nach Primidealen sind immer lokal; das maximale Ideal ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Weil es $\neq 0$ ist, ist $R_\mathfrak{p}$ kein Körper. Aus Aufgabe 2(a) von Blatt 5 folgt daher $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$. Mit Satz 4.3.3 (c) in der Vorlesung schließen wir, dass $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring ist. Alternativ kann man benutzen, dass R faktoriell ist, und direkt 4.3.3 (d) benutzen. Um die diskrete Bewertung zu bestimmen, schreibe $\mathfrak{p} = (p)$ mit einem Primelement $p \in R$. Es sei K der Quotientenkörper von $R_\mathfrak{p}$; dies ist zugleich der Quotientenkörper von R. Für $f \in K^*$ können wir, weil R faktoriell ist, $f = \frac{up^n}{u'p^{n'}}$ mit $u, u' \in R \setminus (p)$ und $n, n' \geq 0$ schreiben. Nach Definition (vgl. Beweis von Satz 4.3.3) hat f die Bewertung $n - n'$. Falls $f \in R$, ist dies also das größte n mit $p^n | f$. Daher ist es auch sinnvoll, die Bewertung von 0 als ∞ zu definieren; das Primelement p geht unendlich oft darin auf. Die Bewertung eines Polynoms $f \in k[T] \setminus \{0\}$ bezüglich dem Primelement $T - a$ ist also das größte n mit $(T - a)^n | f$ und damit nichts weiter als die Vielfachheit der Nullstelle a in f. In der Tat kann man sich diskrete Bewertungen stets als Vielfachheiten vorstellen.

4. $\star$ Zeigen Sie, dass der Ring der formalen Potenzreihen $K[[T]]$ über einem Körper K ein diskreter Bewertungsring ist.

   LÖSUNG: Betrachte den Homomorphismus $\varphi : K[[T]] \to K, \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \mapsto 0$. Er ist surjektiv, sein Kern also ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq K[[T]]$. Jedes Potenzreihe $f \in K[[T]] \setminus \mathfrak{m}$ ist invertierbar: Durch Skalieren dürfen wir $\varphi(f) = 1$ annehmen. Es gibt also ein $g \in K[[T]]$ mit $f = 1 - gT$. Dann ist die Potenzreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} (gT)^i$$

wohldefiniert, denn der Koeffizient vor jedem T^n ist lediglich eine endliche Summe. Nun rechnet man aber wie bei der geometrischen Reihe nach, dass diese Reihe zu f invers ist. Damit kann es kein weiteres maximales Ideal geben, d.h. $K[[T]]$ ist lokal. Für $f \in K[[T]]$ sei $v(f) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ das größte n mit $T^n | f$. Mit anderen Worten, es gilt $f = a_n T^n + a_{n+1} T^{n+1} + \dots$ (höhere Terme) mit $a_n \in K^*$. Dann gilt offensichtlich $v(fg) = v(f) + v(g)$ für alle $f, g \in K[[T]]$. Es ergibt sich, dass $K[[T]]$ ein Integritätsring ist:

$$f, g \neq 0 \Rightarrow v(f), v(g) < \infty \Rightarrow v(fg) < \infty \Rightarrow fg \neq 0.$$

Für $n := v(f) \leq v(g)$ gilt $v(f+g) \geq n$, denn f beginnt mit T^n, g beginnt mit T^n oder sogar mit höheren Termen, sodass auch in $f+g$ nur solche Terme vorkommen. Für alle $f, g \in K[T]$ gilt daher $v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$. Schließlich können wir v formal durch $v(f/g) := v(f) - v(g)$ auf $\mathrm{Quot}(K[[T]]) = K[[T]]_T$ fortsetzen und erhalten damit eine diskrete Bewertung.