Algebraische Geometrie
SoSe 2012

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

13. Übungsblatt

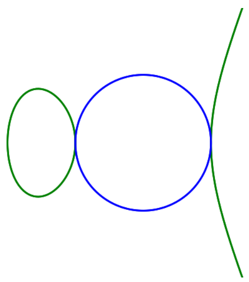
Für die Ferien

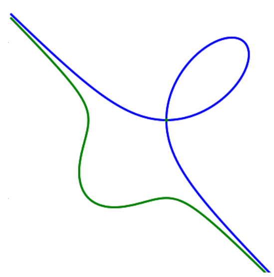
1. Wie sieht das Schnittverhalten zwischen den folgenden Kurven im $\mathbb{P}^2$ aus?

   (a) $V(y^2z - x(x-2z)(x+z))$ und $V(y^2 + x^2 - 2xz)$

   (b) $V((x^2+y^2)z + x^3 + y^3)$ und $V(x^3 + y^3 - 2xyz)$

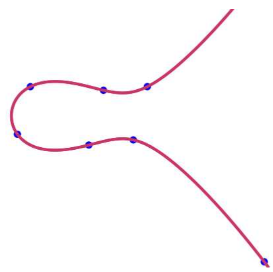
   Passen die Ergebnisse zum Satz von Bézout? Bilder der affinen Karte $\{z \neq 0\}$:





2. Im englischen Wikipedia Artikel zum Satz von Bézout (http://en.wikipedia.org/wiki/Bezout's_theorem) wird ein sehr knapper Beweis skizziert. Versuchen Sie, diesen auszuarbeiten.

3. Nach Satz 4.6.4. lässt sich die Kubik $E = V(y^2z - x^3 + xz^2 - z^3)$ als abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $\infty := (0:1:0)$ auffassen. Berechnen Sie für den Punkt $P := (1:1:1)$ ein paar Summen $P \oplus P$, $P \oplus P \oplus P, \dots$. Das Bild zeigt $E \cap \{z \neq 0\}$.



4. Bei der Berechnung der Schnittvielfachheit der Parabel $y = x^2$ mit der Achse $y = 0$ im Ursprung tritt der lokale Ring $k[x]/x^2$ in Erscheinung. Dieser ist nicht reduziert und damit kein Koordinatenring einer Varietät. Wie könnte man trotzdem dem Ring $k[x]/x^2$ einen topologischen Raum X zusammen mit einer Garbe von Ringen darauf (d.h. einem geringten Raum) zuordnen, welcher das Schnittverhalten wiederspiegelt?